

Phys. sp.

219

gs

Phys. sp. 219 95

Foerpl

<36636796960010



<36636796960010

Bayer. Staatsbibliothek

DIE
GEOMETRIE DER WIRBELFELDER.

IN ANLEHNUNG AN DAS BUCH DES VERFASSERS
ÜBER DIE MAXWELL'SCHE THEORIE DER ELEK-
TRICITÄT UND ZU DESSEN ERGÄNZUNG.

VON

DR. A. FÖPPL,

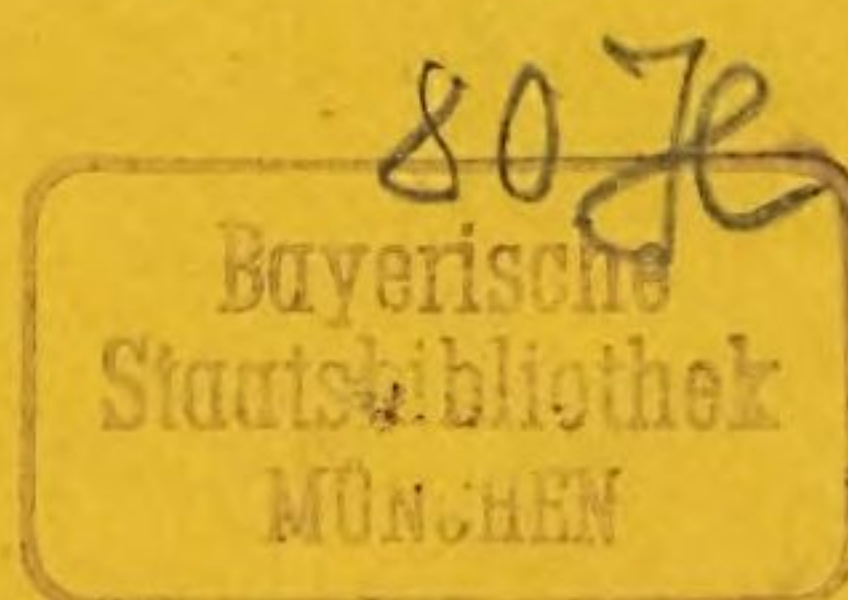
PROF. DER MECHANIK A. D. TECHN. HOCHSCHULE IN MÜNCHEN.



LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1897.



Neuester Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

1895. 1896.

- Bianchi, Luigi**, Vorlesungen über Differentialgeometrie. Autorisierte deutsche Übersetzung von MAX LUKAT, Oberlehrer in Hamburg. 2 Lieferungen. I. Lieferung. [IV u. 336 S.] gr. 8. 1896. geh. n. *M* 12.—
- Biermann, Dr. Otto**, o. ö. Professor an der Technischen Hochschule zu Brünn, Elemente der höheren Mathematik. Vorlesungen zur Vorbereitung des Studiums der Differentialrechnung, Algebra und Funktionentheorie. [XII u. 382 S.] gr. 8. 1895. geh. n. *M* 10.—
- Cantor, Moritz**, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. 3 Bände. III. (Schluß-)Band. 3 Abt. II. Abt. Die Zeit von 1700 bis 1726. Mit 30 Fig. im Text. [472 S.] gr. 8. 1896. geh. n. *M* 6.—
- Cranz, Prof. Dr. Carl**, Lehrer für Physik an der Kgl. Oberrealschule und Dozent an der Kgl. Technischen Hochschule in Stuttgart, Compendium der theoretischen äusseren Ballistik. Zum Gebrauch von Lehrern der Mechanik und Physik an Hochschulen; von Artillerieoffizieren; Instructoren an Schießschulen, Artillerieschulen und Kriegsacademien; Mitgliedern von Artillerie- und Gewehr-Prüfungscommissionen; Gewehrtechnikern. Mit 110 Figuren im Text. [XII u. 511 S.] gr. 8. 1896. geh. n. *M* 20.—
- Eberhard, Dr. V.**, Professor a. d. Universität zu Königsberg i. P., die Grundgebilde der ebenen Geometrie. In 2 Bänden. I. Band. Mit 5 Figurentafeln. [XLVIII u. 302 S.] gr. 8. 1895. geh. n. *M* 14.—
- Fiorini, Matteo**, Erd- und Himmelsgloben, ihre Geschichte und Konstruktion. Nach dem Italienischen frei bearbeitet von S. GÜNTHER. Mit 9 Textfiguren. [V u. 137 S.] gr. 8. 1895. n. *M* 4.—
- Grassmann's, Hermann**, gesammelte mathematische und physikalische Werke. Auf Veranlassung der mathematisch-physischen Klasse der Kgl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften und unter Mitwirkung der Herren: JAKOB LÜROTH, EDUARD STUDY, JUSTUS GRASSMANN, HERMANN GRASSMANN DER JÜNGERE, GEORG SCHEFFERS herausgegeben von FRIEDRICH ENGEL. In 3 Bänden. I. Band. II. Theil: die Ausdehnungslehre von 1862. Mit 37 Figuren im Text. [VIII u. 511 S.] gr. 8. 1896. geh. n. *M* 16.—
- Gundelfinger, Dr. Sigmund**, Prof. an der Technischen Hochschule zu Darmstadt, Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte, herausgegeben von Dr. FRIEDRICH DINGELDEY, Privatdocent ebendasselbst. Mit in den Text gedruckten Figuren und einem Anhang, enthaltend Aufgaben und weitere Ausführungen. [VIII u. 434 S.] gr. 8. 1895. geh. n. *M* 12.—
- Hrabák, Josef**, k. k. Oberbergrath u. Prof., practische Hilfstabellen für logarithmische und andere Zahlenrechnungen. Dritte, abgekürzte Ausg. [V u. 253 S.] gr. 8. 1895. geb. n. *M* 3.—
- Klein, F.**, Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie. Ausgearbeitet von F. Tägert. Mit 10 in den Text gedr. Fig. u. 2 lith. Tafeln. [V u. 66 S.] gr. 8. 1895. geh. n. *M* 2.—
- Koenigsberger, Dr. Leo**, Professor der Mathematik an der Universität zu Heidelberg, Hermann von Helmholtz's Untersuchungen über die Grundlagen der Mathematik und Mechanik. Mit einem Bildnis Hermann von Helmholtz's von FRANZ VON LENBACH vom 30. April 1894. [IV u. 58 S.] gr. 8. 1896. geh. n. *M* 2.40.



Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Föppl, Dr. A., Ingenieur, Professor an der Kgl. Technischen Hochschule zu München, früher Oberlehrer a. d. städt. Gewerbeschule zu Leipzig, Einführung in die Maxwell'sche Theorie der Elektrizität. Mit einem einleitenden Abschnitte über das Rechnen mit Vectorgrößen in der Physik. Mit Figuren im Texte. [XVI u. 413 S.] gr. 8. 1894. geh. n. *M.* 10.—

Durch dieses Buch soll der Leser in die von Maxwell begründete moderne Theorie der elektrischen und magnetischen Erscheinungen mit einem weit geringeren Aufwand von Mühe eingeführt werden, als ihn das Studium der Originalwerke erfordert. Von dem Boltzmannschen Werke, das den gleichen Zweck verfolgt, unterscheidet es sich der gesamten Anlage nach dadurch, daß nicht wie dort die ganze Theorie aus den Lagrangeschen Gleichungen hergeleitet wird, sondern daß sich der Entwicklungsgang möglichst eng an den aus den Fernwirkungstheorien gewohnten anschließt, wodurch das Studium sehr erleichtert wird.

Eine sichere Beherrschung der Anfangsgründe der gewöhnlichen Analysis wird zwar bei dem Leser vorausgesetzt. Wer über diese verfügt, wird sich aber mit Leichtigkeit in dem Buche zurechtfinden. Der Verfasser hofft daher, daß nicht nur die Physiker von Fach, die Lehrer und die Studierenden der Physik und Mathematik, sondern auch die Ingenieure und die Studierenden der Elektrotechnik mit Nutzen davon Gebrauch machen können, und er würde es mit ganz besonderer Freude begrüßen, wenn seine Arbeit dazu beitrüge, der Maxwellschen Theorie namentlich auch in den zuletzt genannten Kreisen neue Freunde zu erwerben.

Näheres siehe Teubners Mitteilungen 1894 Nr. 2/3, S. 48.

— das Fachwerk im Raume. Mit zahlr. in den Text gedruckten Figuren und 2 lithogr. Tafeln. [VIII u. 156 S.] gr. 8. 1892. geh. n. *M.* 3.60.

In diesem Werke wird zum ersten Male der Versuch einer einheitlichen und erschöpfenden Darstellung der Lehre vom räumlichen Fachwerke gemacht.

Das Buch zerfällt in drei Abschnitte, von denen der erste die allgemeine Theorie des räumlichen Fachwerkes, der zweite das Flechtwerk, die Schwedlerschen und Netzwerkuppeln und die Tonnenflechtwerkdächer und der dritte die Windverstreben der Brücken und der Binderdächer behandelt.

Bei der Abfassung bemühte sich der Verfasser besonders, das Buch möglichst lesbar zu machen. Er vermied daher möglichst ein breites Eingehen auf ermüdende Einzelheiten, die sich jeder geübte Konstrukteur im Bedarfsfalle mit leichter Mühe selbst zurecht legen kann, und suchte überall die leitenden Gesichtspunkte in klarer, deutlicher Sprache hervorzuheben.

Näheres siehe Teubners Mitteilungen 1891 Nr. 5/6, S. 127.

— Leitfaden und Aufgabenammlung für den Unterricht in der angewandten Mechanik. Mit zahlreichen Figuren im Texte. 2 Hefte. gr. 8. 1890. In Leinwand geb. n. *M.* 4.40.

Einzelne:

I. Heft. [IV u. 140 S.] n. *M.* 2.—; II. Heft. [VI u. 180 S.] n. *M.* 2.40.

Die mathematische Litteratur weist eine große Zahl guter Lehrbücher der analytischen Mechanik auf; der Lehrer, welcher an einer Mittelschule die elementare Mechanik vorträgt, sieht sich dagegen vergeblich nach einem seinen Zwecken vollständig entsprechenden Buche um.

Eine 13jährige Lehrerfahrung kam dem Verf. in Verbindung mit den Erfahrungen, die er in seinen früheren litterarischen Arbeiten einerseits in der mathematischen Physik und andererseits in den technischen Wissenschaften sammelte, bei der Bearbeitung zu statten. Es läßt sich daher hoffen, daß das von ihm Gebotene gerechten Ansprüchen genügen wird. Der von ihm bearbeitete Leitfaden soll nach der Absicht des Verfassers nicht nur in der Hand des Schülers während des Unterrichtes ein brauchbares Lehrbuch sein, sondern auch späterhin dem gereiften Manne ein treuer und zuverlässiger Berater bei allen wichtigeren Fragen der Elementarmechanik bleiben. Eine Ergänzung des Leitfadens soll hierbei das von dem Schüler zu führende Heft bilden, in welches die Lösungen der zahlreich in den Text eingestreuten und passend gewählten Aufgaben eingetragen werden sollen.

Näheres siehe Teubners Mitteilungen 1889 Nr. 6, S. 118.

 DIE
GEOMETRIE DER WIRBELFELDER.

IN ANLEHNUNG AN DAS BUCH DES VERFASSERS
ÜBER DIE MAXWELL'SCHE THEORIE DER ELEK-
TRICITÄT UND ZU DESSEN ERGÄNZUNG.

VON

DR. A. FÖPPL,

PROF. DER MECHANIK A. D. TECHN. HOCHSCHULE IN MÜNCHEN



LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1897.

ALLE RECHTE,
EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

Vorwort.

Diese Schrift bildet eine Fortsetzung meines Buches über die Maxwell'sche Theorie der Elektrizität, das vor jetzt bald 3 Jahren im gleichen Verlage erschien. Ich hatte damals die Herausgabe eines zweiten Bandes in Aussicht gestellt, musste aber später von der Ausführung dieses umfassenderen Planes wieder absehen, weil durch den inzwischen eingetretenen Wechsel in meiner amtlichen Stellung meine Arbeitskraft nach anderen Richtungen hin zu stark in Anspruch genommen wurde. Aus diesem Grunde habe ich mich darauf beschränkt, jenen Abschnitt des geplanten zweiten Bandes auszuarbeiten, der die Theorie der Vectorfunktionen behandeln sollte, und von dem ich annehme, dass er zur Ergänzung meines früheren Buches nöthiger ist, als jeder andere.

Zu dieser Abschätzung wurde ich durch verschiedene Umstände, namentlich auch durch die Besprechungen geführt, die meine „Maxw.-Theorie“ in den Fachblättern fand. Abgesehen von einer vereinzelt Ausnahme, auf die es sich nicht verlohnt, weiter einzugehen, kann ich zwar mit Befriedigung feststellen, dass meine Arbeit im Allgemeinen die erhoffte Anerkennung fand. Beanstandungen, die sich gegen meine Darstellung der Vectoranalysis richteten, kehrten indessen dabei ziemlich häufig wieder. Schon aus diesem Grunde musste ich annehmen, dass sie nicht unberechtigt sind. Ich konnte mich davon aber auch selbst überzeugen, als ich im vorigen Sommersemester eine Vorlesung über die Theorie der Elektrizität, im Wesentlichen auf Grund meines Buches, abhielt. Ich fand, dass jene frühere Bearbeitung einen unfertigen Eindruck hinterlassen

müsse, weil manche Betrachtungen, die man an jener Stelle erwarten möchte, für den zweiten Band zurückgestellt waren. Diesem Uebelstande hoffe ich durch die Herausgabe der vorliegenden Schrift abhelfen zu können.

Andere Gründe, die mich ferner noch bewogen haben, gerade auf diesen Theil ein besonderes Gewicht zu legen, sind in § 1 näher besprochen. Hier will ich nur noch bemerken, dass ich durch einen Irrthum, der mir früher selbst widerfuhr und der dann auch noch weitere Kreise zog, eindringlich auf die Vorthelle hingewiesen wurde, die ein eingehendes Studium der rein geometrischen Eigenschaften physikalischer Felder zu gewähren vermag. Auf S. 212 meines früheren Buches sagte ich in Bezug auf die Abschirmung des magnetischen Feldes eines gradlinigen elektrischen Stromes durch eine diesen umgebende Stahlröhre: „Ein magnetisch absolut harter Mantel würde im Gegensatze dazu gar keine Kraftlinien in den Luftraum übertreten lassen“. Dieser Schluss ist indessen nur unter der damals nicht erkannten Voraussetzung berechtigt, dass der Mantel den Aussenraum vollständig — ohne jede noch so kleine Lücke — von dem stromführenden Leiter trennt; er verliert dagegen vollständig seine Gültigkeit für eine Röhre, die den Draht nur auf eine gewisse Länge umgibt. Man denke sich nämlich zwei kreisförmige Integrationswege, von denen der eine die Röhre, der andere den freien Draht in einiger Entfernung vom Röhrenende umkettet. Für beide Wege muss aus geometrischen Gründen, aus welchem Materiale auch die Röhre bestehen mag, das Linienintegral von $\oint$ gleich gross sein. Um dies zu erkennen, denke man sich jeden Kreis an einer Stelle aufgeschnitten und die vier Endpunkte paarweise durch zwei nebeneinander in der Luft verlaufende Integrationswege verbunden. Man gewinnt so einen neuen geschlossenen Integrationsweg, für den das Linienintegral nothwendig gleich Null sein muss, weil die Luft als magnetisch weicher Körper anzusehen ist und der Integrationsweg daher keinen Wirbel-faden des Feldes umkettet. Die Beiträge der vorher erwähnten nebeneinander herlaufenden Verbindungsstrecken heben sich in

dem Linienintegrale gegeneinander weg, die Beiträge der beiden Kreise müssen also gleich gross, d. h. das Feld muss unmittelbar ausserhalb der Röhre überall ebensogross sein, als wenn die Röhre gar nicht vorhanden wäre, selbst dann wenn diese absolut magnetisch hart in dem von mir gebrauchten Sinne sein sollte. Mit anderen Worten lässt sich dieses Ergebniss dahin ausdrücken, dass sich die Magnetisirungswelle, obschon sie das magnetisch harte Material nicht zu durchdringen vermag, von den Röhrenenden her genau so über den Mantel der Röhre hin ausbreiten muss, als wenn der Stahl durch Luft ersetzt wäre.

Bei dieser Gelegenheit möchte ich ein Bedenken erwähnen, das Herr Beck in einer seiner Abhandlungen über die magnetische Härte (Wied. Ann. Bd. 59, S. 89, 1896) gegen meine Entwicklungen erhoben hat. Dieses Bedenken beruht auf einem Missverständnisse der von mir gebrauchten Ausdrücke. Wenn ich, wie grade vorher wieder, von der Ausbreitung rede, die die Magnetisirungswelle aus geometrischen Gründen annehmen muss, denke ich nicht an einen Vorgang, der sich in der Zeit abspielt; ich gebrauche vielmehr hier den Ausdruck Fortpflanzung nur in demselben Sinne, in dem man z. B. von der Fortpflanzung des hydraulischen Druckes in einem Systeme communicirender Röhren spricht, d. h. ich denke mir den augenblicklichen Zustand des Feldes gegeben und schreite nacheinander das ganze Gebiet ab, indem ich aus dem, was ich vorher an einer bestimmten Stelle vorfand, auf das schliesse, was ich weiterhin anzutreffen erwarten muss. Das Gesetz der zeitlichen Aenderung des ganzen Feldes, das Herr Beck an die Stelle meiner Betrachtungen gesetzt sehen möchte, wird durch die beiden Hauptgleichungen ausgesprochen. Mit deren Einführung gestaltet sich freilich die Betrachtung umfassender; wenn ich einen Weg gekannt hätte, um die sich dabei einstellenden Integrationsschwierigkeiten zu überwinden, würde ich ein solches Vorgehen von vornherein vorgezogen haben. Solange es aber nicht gelungen ist, auf diese Weise zu einem brauchbaren Resultate zu gelangen, kann auch jene summarische Betrachtung

tung, deren logische Berechtigung sich ebenso scharf prüfen lässt, als irgend eine mathematische Formel, recht nützliche Dienste leisten.

Ich darf an dieser Stelle nicht unerwähnt lassen, dass Herr A. Kohn bei seinen Versuchen über die Schirmwirkung einer Stahlröhre (Wied. Ann. Bd. 58, S. 527, 1896) ein Ergebniss gefunden hat, das mit dem des Herrn Beck und mit den vorausgehenden Ausführungen in einem gewissen Widerspruche steht. Nach dem, was ich von unbedingt vertrauenswürdiger Seite über die Sorgfalt, mit der diese Versuche angestellt wurden, gehört habe, kann ich nicht im Zweifel darüber sein, dass es sich dabei um eine gut beobachtete Thatsache handelt. Es wäre hier nicht am Platze, die verschiedenen Möglichkeiten zu erörtern, wie dieser Widerspruch aufgeklärt werden könnte. Die Lehre vom Magnetismus ist zur Zeit noch in einem so unfertigen Zustande, dass es wohl noch grosser Anstrengungen bedürfen wird, ehe nach allen Richtungen hin Klarheit geschaffen ist. Die beste Stütze für Untersuchungen dieser Art wird aber jedenfalls eine von allen physikalischen Hypothesen freie Geometrie der Felder bilden.

In neuerer Zeit hat man Werth darauf gelegt, zwischen gerichteten Grössen zu unterscheiden, denen ein polarer und solchen, denen ein axialer Charakter zukommt. Herr Wiechert hat für die letzteren sogar einen besonderen Namen eingeführt; er nennt nur die ersten Vektoren und die anderen Rotoren. So lange man sicher sein kann, dass dieser Charakter den Feldgrössen in Wirklichkeit zukommt, lässt sich nichts gegen eine solche Eintheilung einwenden. Niemand wird bestreiten, dass zwischen einer Translation und einer Rotation in der Kinematik oder zwischen einer Einzelkraft und einem Kräftepaar in der Mechanik oder zwischen der Geschwindigkeit und dem Wirbel in der Hydraulik ein Gegensatz — von ähnlicher Art übrigens wie der zwischen reellen und imaginären Zahlen — besteht, der durch die genannten Bezeichnungen glücklich zum Ausdruck gebracht werden kann. Man wird auch zugeben, dass ein Gegensatz gleicher oder ähnlicher Art zwischen elek-

trischen und magnetischen Feldern anzunehmen ist. Für vorläufig noch ganz hypothetisch halte ich es dagegen, wenn man beide Rollen schon jetzt in bestimmter Weise auf diese Feldgrößen vertheilt; es könnte sehr wohl sein, dass sich die Meinungen darüber später umkehrten. Aber auch abgesehen davon, hat eine solche nähere Verfügung über die physikalische Bedeutung einer gerichteten Grösse keinen Platz in der allgemeinen geometrischen Theorie der Felder — um so mehr als für die „Rotorfelder“ dieselben Gesetze gelten wie für die übrigen Vectorfelder. Aus diesen Gründen bin ich im Texte auf jene, wie es scheint, jetzt recht beliebt gewordene, Einteilung gar nicht eingegangen.

In der Darstellungsweise habe ich mich bei der Abfassung dieser Schrift ganz an mein früheres Buch angelehnt. Als Vorbild hat mir dabei in erster Linie die Abhandlung Maxwell's „Ueber Faraday's Kraftlinien“ (deutsch herausgegeben von Boltzmann in der Ostwald'schen Klassikerausgabe, 1895) gedient. — So viel als möglich habe ich mich bemüht, auch für solche Leser verständlich zu bleiben, die mein früheres Buch nicht kennen. Manche Wiederholungen waren dabei natürlich unvermeidlich; ich hoffe aber, dass sie nicht zum Schaden der Sache ausgefallen sind.

Ein Mathematiker, im engeren Sinne des Wortes, wäre vielleicht in mancher Hinsicht besser berufen gewesen, eine solche „Geometrie“ oder „Funktionentheorie“ abzufassen als ich. Ohne Zweifel wäre er wenigstens den heute üblichen Anforderungen an die Strenge der Darstellung besser gerecht geworden und er hätte auch mehr Gelegenheit gehabt, an verwandte mathematische Untersuchungen anzuknüpfen, die schon ausgearbeitet vorliegen, die aber ihren Weg in die sich nur für die Anwendungen der Mathematik interessirenden Kreise, zu denen ich mich zähle, noch nicht gefunden haben. Andererseits lehrt aber die Geschichte, dass die Mathematik von jeher ihre fruchtbarsten Anregungen aus konkret vorliegenden physikalischen Problemen gezogen hat, die eine ihnen angepasste mathematische Formulirung dringend verlangten. Offenbar hat

diese Anpassung mathematischer Gestaltung an die Fragestellung, die sich in der Physik als nöthig oder zweckmässig erweist, ihr Ende noch lange nicht gefunden. So lange dies nicht geschehen ist, wird die Mathematik zu ihrer Förderung gelegentliche Mitarbeiter aus den Nachbargebieten schwerlich ganz entbehren können.

München, im December 1896.

A. Föppl.

Inhaltsübersicht.

	Seite
Erstes Capitel. Abbildung der Vectorfunktionen. Wirbel-	
freie Felder	1—29
§ 1. Definition der Felder	1
§ 2. Die Vectorfunktionen	5
§ 3. Die Abbildung der Vectorfunktionen	7
Quellen und Sinkstellen	10
§ 4. Allgemeine Eigenschaften eines Quellensystems	11
Feldsumme $\oint$	12
§ 5. Wirbelfreie Felder	14
Potential V	16
§ 6. Ableitung des Vectorfeldes aus dem Potentialfelde	17
Operation ∇	17
§ 7. Ableitung des Vectorfeldes aus dem Quellenfelde	19
§ 8. Herleitung des Potentialfeldes aus dem Quellenfelde	22
§ 9. Definition des Wirbels	26
Operation curl	29
Zweites Capitel. Die linearen Vectorfunktionen	30—49
§ 10. Definition der linearen Vectorfunktion	30
§ 11. Darstellung in Coordinaten	33
Der lineare Operator C	36
§ 12. Lineare Funktion eines Einheitsvectors	36
§ 13. Quellen und Wirbel der linearen Vectorfunktion	37
§ 14. Andere Darstellung der linearen Vectorfunktion	39
§ 15. Die Umkehrung der linearen Funktionen	42
§ 16. Der Satz von Stokes für das lineare Feld	44
§ 17. Uebertragung des Stokes'schen Satzes auf beliebige Felder	47
Drittes Capitel. Das quellenfreie Feld mit einem Wir-	
belfaden	49—69
§ 18. Stellung der Aufgabe	49
§ 19. Zurückführung des Feldes auf ein wirbelfreies	54
Doppelbelegungen	55
§ 20. Lösung der Aufgabe	59
Lösung von Gauss	60

	Seite
§ 21. Andere Form der gefundenen Lösung	63
Gesetz von Biot-Savart	65
§ 22. Gerichtete Quellen und Ampère'sche Wirbel	66
Viertes Capitel. Die Wirbelintegration der quellenfreien Vectorfunktionen.	69—89
§ 23. Das Vectorpotential	69
§ 24. Ermittlung des Integrals	71
Analogie zwischen Wirbelfeld und Quellenfeld	74
§ 25. Zusammenhang zwischen den Funktionen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$	74
Funktionsfolge $\mathfrak{M}$, V , $\mathfrak{v}$, q , $\mathfrak{p}$	76
§ 26. Lösung der Hauptaufgabe mit Hülfe des Vectorpotentials	77
§ 27. Fluss zwischen zwei Wirbelfäden	80
§ 28. Inductionscoefficient zwischen zwei conaxialen Kreisen Selbstinductionscoefficient für den kreisförmigen Wir- belfaden.	82 84
§ 29. Verschiedene Deutungen des Vectorpotentials	86
§ 30. Andere Ableitung des Ausdruckes von Gauss für das scalare Potential eines Wirbelfadens.	88
Fünftes Capitel. Beliebige Funktionen. Raumsummen	89—108
§ 31. Beliebige Vectorfunktionen	89
Hydrodynamisches	91
§ 32. Das Feld als Streckensystem	93
§ 33. Die Quadratsummen	96
§ 34. Der Satz von Green und seine Erweiterungen	98
§ 35. Raumsumme einer Potentialfunktion	101
§ 36. Die Potentialfunktion als Raumsumme	102
§ 37. Krümmungsmaass eines Feldes	103
$\mathfrak{f} = \nabla^2 \mathfrak{p}$	106

Erstes Capitel.

Abbildung der Vectorfunktionen. Wirbelfreie Felder.

§ 1. Definition der Felder.

Der wichtigste Begriff der Faraday-Maxwell'schen Electricitätslehre ist der Begriff des physikalischen Feldes. Man versteht darunter ein Gebiet, innerhalb dessen jedem Punkte ein eindeutig bestimmter physikalischer Zustand von irgend einer Art zugeschrieben wird. Je nach der Art des physikalischen Zustandes, den man gerade ins Auge fasst, unterscheidet man verschiedene Arten von Feldern. In dieser Schrift lasse ich indessen die Frage nach der besonderen Art des Feldes vollständig offen und befasse mich nur mit den allgemeinen geometrischen Eigenschaften, die allen physikalischen Feldern gewisser Classen, welches auch ihr besonderer Ursprung sein möge, gemeinsam zukommen.

In Classen werde ich die Felder allerdings eintheilen. Die Eintheilungsgründe sind aber hier von rein geometrischer Art und haben gar nichts mit der physikalischen Bedeutung zu thun, die man dem Felde in einem bestimmten Falle der Anwendung beizulegen hat. Desshalb habe ich diesem Hefte die Ueberschrift „Geometrie der Wirbelfelder“ gegeben, die freilich insofern etwas zu eng gefasst ist, als daneben auch Felder von anderen Classen besprochen werden. Es kam mir aber darauf an, scharf hervorzuheben, dass die Lehren, die ich hier zusammenstelle, von allen physikalischen Hypothesen unabhängig sind und daher auf strenge mathematische Gültigkeit Anspruch erheben können. Andererseits wollte ich auch darauf hinweisen, dass der Behandlung der Wirbelfelder die Hauptrolle in dieser Arbeit zufällt.

Ich möchte an dieser Stelle noch erwähnen, was mich zu dieser Ausarbeitung veranlasst hat. Die Maxwell'sche Elektrizitätslehre kommt so wenig wie irgend eine andere physikalische Theorie ohne besondere Hypothesen aus, über deren Berechtigung sich einstweilen noch streiten lässt. Weitere Erfahrungen werden erst lehren müssen, welche dieser Hypothesen endgültig beizubehalten und welche zu verwerfen oder zu ändern sind. Im Verlaufe der weiteren Ausgestaltung, die die Maxwell'sche Theorie seit der Zeit ihrer Begründung erfuhr, haben aber auch die mathematischen Methoden der Untersuchung solcher Probleme allmählich eine nicht unerhebliche Vervollkommnung erfahren, die mit den Hypothesen der physikalischen Theorie gar nichts zu thun hat. Es lohnt sich daher, diese Bestandtheile der Theorie auszusondern und sie einmal losgelöst von allem Uebrigen zu besprechen. Auch der Gegner der Maxwell'schen Theorie wird sich mit diesen Lehren einverstanden erklären müssen, so lange er nicht einen logischen Fehler in der Ableitung der Sätze bestimmt nachzuweisen vermag.

Von den Feldern, die ich hier behandle, setze ich, wenn nichts anderes gesagt wird, stets voraus, dass sie nicht ins Unendliche reichen und ich behalte mir vor, an geeigneter Stelle näher anzugeben, was unter dieser Voraussetzung zu verstehen ist. Hier will ich indessen schon erwähnen, dass die Gravitation durch diese einschränkende Voraussetzung aus dem Kreise der zu untersuchenden Felder ausgeschlossen wird. Ferner nehme ich an, dass die Felder überall stetig sind und nicht unendlich werden; Unstetigkeiten und unendlich grosse Feldwerthe lasse ich wenigstens nur als Grenzfälle zu.

Natürlich steht es auch frei, diese Voraussetzungen fallen zu lassen und zuzusehen, wie sich die Schlüsse dann verallgemeinern. Hier befasse ich mich aber damit nicht, weil ich nicht weitläufiger in der Darstellung werden will, als es mit Rücksicht auf die Anwendungen, die man von den vorgetragenen Lehren zu machen beabsichtigen kann, nöthig ist. Dass man auch in der Elektrizitätslehre ohne Berücksichtigung

von Unstetigkeiten mit Hülfe des Principes der Continuität der Uebergänge auskommen kann, ist jetzt wohl allgemein anerkannt.

Die Vereinfachungen, die man durch diese Voraussetzungen erzielt, sind so erheblich, dass man nicht auf sie verzichten kann, blos um eine Vollständigkeit zu erreichen, die praktisch fast ohne Werth ist. Nur dass die Gravitationsfelder ausgeschlossen werden, wäre vielleicht zu beklagen. Die Lehre von den Gravitationsfeldern scheint mir aber noch so weit von der endgültigen Fassung, die sie später wohl einmal erhalten wird, entfernt zu sein, dass es sich vorläufig nicht lohnt, sie in die allgemeinen Betrachtungen mit aufzunehmen. Zudem darf man es wohl immerhin noch als fraglich bezeichnen, ob auch selbst die Gravitationsfelder wirklich ins Unendliche reichen. Man hat ja in letzter Zeit manche ernste Bedenken gegen die strenge Gültigkeit des Newton'schen Attractionsgesetzes bis in unendliche Fernen geltend gemacht, die sich kaum von der Hand weisen lassen. — Die nächste Aufgabe der theoretischen Physik besteht jedenfalls darin, die elektrischen und magnetischen Felder, die dem Experimente zugänglich sind, zu studieren; eine tiefere Einsicht, die hier gewonnen wird, kommt dann später von selbst auch der Gravitationstheorie zu Gute.

In manchen Fällen ist es möglich, den physikalischen Zustand, auf den es gerade ankommt, für jede Stelle des Feldes durch eine einzige Zahlenangabe vollständig zu beschreiben. Solche Felder sollen als scalare Felder bezeichnet werden. In anderen Fällen ist zur Kennzeichnung des Feldzustandes die Angabe einer gerichteten Grösse erforderlich. Diese Felder heissen Vectorfelder und von ihnen wird in dieser Schrift vorwiegend die Rede sein. Es gibt auch Felder, bei denen eine gerichtete Grösse noch nicht genügt, um den Zustand an jeder Stelle vollständig zu beschreiben. Im allgemeinsten Falle wird z. B. der „Zwangszustand“ in einem Medium (etwa in einem elastischen Körper) erst durch 3 gerichtete Grössen oder durch 9 Zahlenangaben vollständig beschrieben. In der ge-

wöhnlichen Elasticitätstheorie können diese 9 Zustandszahlen nur deshalb auf 6 herabgesetzt werden, weil von aussenher keine Kraftwirkungen auftreten, die auf eine Drehung jedes Volumenelements hinzielten. Bei dem Zwangszustande, den Maxwell ersonnen hat, um die ponderomotorischen Kräfte in magnetischen Feldern zu erklären, sind aber alle 9 Zustandscomponenten im Allgemeinen beizubehalten.

Es scheint, dass der Fall, in dem erst durch 3 gerichtete Grössen der Feldzustand hinreichend beschrieben werden kann, — wobei natürlich von allen Nebenumständen, die mit dem gerade betrachteten Felde nichts zu thun haben, stets abzu- sehen ist — der allgemeinste ist, der überhaupt in der Natur vorkommt. Ein solches Feld verhält sich zu einem gewöhnlichen Vectorfelde etwa wie dieses zu einem scalaren Felde. Man kann es passend als ein Hypervectorfeld bezeichnen.

Schliesslich bemerke ich noch, dass man gelegentlich mit Grössen zu thun hat, denen eine Doppelrichtung zukommt, also eine Richtung ohne bestimmten Richtungssinn. Das einfachste Beispiel dafür ist die Spannung eines Fadens oder die Längsspannung eines Stabes. Um ersichtlich zu machen, ob es sich hierbei um eine Zug- oder um eine Druckspannung handelt, genügt es nicht, einen einzigen Pfeil auf der Wirkungslinie der Spannung einzutragen; man hat zwei Richtungsangaben dazu nöthig, von denen die eine sich z. B. darauf beziehen kann, auf welcher Seite des Querschnitts jener Theil des Stabes liegt, auf den die mit dem zweiten Pfeile versehene Kraft von der anderen Seite her übertragen wird. Anstatt dessen genügt es auch, neben der Wirkungslinie noch ein Vorzeichen anzugeben, durch das zwischen Zug- und Druckspannung unterschieden wird.

Auch die Torsion eines Stabes gehört dahin. Sie kann entweder so erfolgen, dass die zur Stabaxe parallelen Geraden zu rechts- oder zu linksgängigen Schraubenlinien deformirt erscheinen. Zwischen beiden Schraubenarten kann auch nicht durch Beifügung eines einzigen Pfeiles unterschieden werden, weil eine rechtsgängige Schraube von jeder Seite her denselben

Anblick gewährt. Die Angabe eines Vorzeichens führt aber auch hier zum Ziele.

In allen diesen Fällen handelt es sich aber im Grunde genommen nur um Hypervectorfelder von besonders einfacher Zusammensetzung. Ich vermuthete, dass man die Gravitationsfelder später in dieser Classe unterzubringen haben wird.

§ 2. Die Vectorfunktionen.

Analytisch aufgefasst ist die Theorie der Felder nichts anderes als die Theorie der Funktionen einer gerichteten Grösse. In gewissem Sinne bildet sie eine Erweiterung der gewöhnlichen Funktionentheorie auf den Fall, dass die unabhängige Variable nicht nur in einer Ebene, sondern im dreifach ausgedehnten Raume jede beliebige Richtung und Grösse haben kann.

Wählt man in einem Vectorfelde einen beliebigen Anfangspunkt, von dem die Radienvectoren $\mathbf{r}$ gerechnet werden und bezeichnet man mit $\mathbf{v}$ die gerichtete Grösse, durch die der Zustand des Feldes an der Stelle $\mathbf{r}$ angegeben wird, so bildet die Vectorfunktion

$$\mathbf{v} = f(\mathbf{r}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

die analytische Darstellung des Feldes. Für uns kommen freilich nur besondere Arten der Vectorfunktionen in Betracht, nämlich solche, die überall eindeutig, stetig und endlich sind und im Unendlichen verschwinden.

Auch ein scalares Feld kann durch eine Funktion von $\mathbf{r}$ dargestellt werden; die Funktion muss nur von der Art sein, dass sie zu einem scalaren Werthe führt. Ein Hypervectorfeld entspricht dagegen einer Vectorfunktion von zwei unabhängigen Variablen. Ausser dem Radiusvector tritt in ihr noch eine Einheitsnormale $\mathfrak{N}$ auf, die zu jener Fläche gezogen ist, für die man z. B. den Spannungsbetrag angeben will, wenn es sich um den Zwangzustand in einem Medium handelt. In Bezug auf $\mathfrak{N}$ ist die Funktion, die ein Hypervectorfeld darstellt, übrigens stets linear. Der Begriff der linearen Abhängigkeit wird in der Folge näher definirt.

Wenn man sich der Coordinatenmethode bedienen will, kann man Gl. (1) auch durch die Componentengleichungen

$$v_1 = f_1(xyz); \quad v_2 = f_2(xyz); \quad v_3 = f_3(xyz) \quad . \quad . \quad (2)$$

ersetzen. In manchen Fällen gelangt man auf diese Weise am einfachsten zum Ziele. Jedenfalls darf man aber die Gleichungen (2) immer nur als einen Ersatz der Gl. (1) betrachten, auf die es allein ankommt. Namentlich darf man niemals aus dem Auge verlieren, dass es sich für uns immer nur um die Eigenschaften der ganzen Funktion f handelt und gar nicht um die Eigenschaften der Funktionen $f_1 f_2 f_3$, die in den Gleichungen (2) als blosse Hilfsbegriffe eingeführt sind.

Bei einem scalaren Felde ist dies anders. Es ist ziemlich gleichgültig, ob die scalare Feldgrösse V durch die Vectorgleichung:

$$V = \varphi(\mathbf{r}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

oder durch die Coordinatengleichung

$$V = \varphi(xyz) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

dargestellt wird, da $\mathbf{r}$ stets als geometrische Summe seiner Componenten in drei Axenrichtungen aufgefasst werden kann.

Desshalb hat sich auch die Geometrie der scalaren Felder weit eher entwickelt als die der Vectorfelder. Im Grunde genommen ist nämlich die gewöhnliche Potentialtheorie nichts anderes als die Geometrie der scalaren Felder. Freilich greift sie auch in das Gebiet der Vectorfelder hinüber und ursprünglich wurde sie sogar ausdrücklich zu dem Zwecke ersonnen, die Eigenschaften gewisser Vectorfelder auf möglichst einfache Weise analytisch behandeln zu können. Die gewöhnliche Potentialtheorie führt die Vectorfelder auf scalare Felder zurück oder leitet sie aus diesen ab. Sie hat dabei freilich mit der Schwierigkeit zu kämpfen, dass diese Zurückführung nicht immer möglich ist und sie reicht daher nicht aus, das Problem des Vectorfeldes in seinem ganzen Umfange zu umfassen. In dem Bestreben, mit der gewöhnlichen Potentialtheorie in allen Fällen, die z. B. zur Elektrizitätslehre gehören, auszukommen,

ist man oft auf die sonderbarsten Auskunftsmittel verfallen. Man genügte dadurch wohl zur Noth den augenblicklichen Erfordernissen einer bestimmten Aufgabe, versäumte darüber aber nur zu leicht, die zur fruchtbaren Weiterbildung der Ideen erforderliche consequente Ausgestaltung des Feldbegriffes vorzunehmen.

§ 3. Die Abbildung der Vectorfunktionen.

Wir wissen jetzt, dass unsere Hauptaufgabe in der Untersuchung der allgemeinen Eigenschaften der durch Gl. (1) eingeführten Vectorfunktionen von einer unabhängigen Veränderlichen bestehen wird und wollen uns nun nach den passendsten Mitteln umsehen, durch die wir unser Ziel erreichen können. Dafür gibt uns die Lehre von den Funktionen einer reellen scalaren Veränderlichen einen Fingerzeig. Wir erinnern uns, auf welche Weise man sich über den Sinn des Ansatzes $y = f(x)$, durch den der Begriff der Funktion zuerst in die Mathematik eingeführt wird, Klarheit verschafft. Dazu zieht man eine Abscissenaxe, auf der die Werthe der x abgetragen werden, setzt die y als Ordinaten rechtwinklig an und schliesst aus der Gestalt der erhaltenen Curve auf die Eigenschaften der durch sie abgebildeten Funktion. Dass z. B. $\frac{dy}{dx} = 0$ entweder einem Maximal- oder Minimalwerthe oder auch einem Wendepunkte der Curve entsprechen kann und dass umgekehrt der Verlauf der Curve durch die Rechnung erschlossen werden kann, erkennt man nun mit leichter Mühe, auch als Anfänger. Es mag sein, dass manche Mathematiker heute einen anderen Weg einschlagen, wenn sie ihre Hörer zum ersten Male in den Begriff der Funktion einführen wollen; ich glaube aber nicht, dass sie damit Erfolg haben und nehme an, dass kaum jemals der Begriff der Funktion von Jemand richtig erfasst wurde, dem nicht zuvor das geometrische Bild, das die Curve liefert, bekannt geworden wäre.

Eine Funktion von zwei Veränderlichen $z = f(xy)$ wird ebenso durch eine Fläche abgebildet, an der wir die Eigen-

schaften der Funktion leicht studiren können. Ist der Begriff der Funktionen erst einmal so weit gefestigt, dann kann freilich bei einer grösseren Zahl von Veränderlichen jede Abbildung entbehrt werden. Bei drei unabhängigen Veränderlichen ist indessen noch eine Abbildung durch irgend ein scalares Feld möglich, wenn man der Anschauung zu Hülfe kommen will. Man denke sich etwa jedem Punkt des Raumes mit den Coordinaten xyz eine Temperatur beigelegt, durch die der Werth der Funktion $f(xyz)$ angegeben wird. Natürlich ist diese Abbildung nur rein formal aufzufassen und wir müssen uns davor hüten, irgend ein Erfahrungsgesetz, das etwa aus der Wärmelehre bekannt ist, mit der Abbildung und den Schlüssen, die wir mit ihrer Hülfe ziehen wollen, zu vermengen. Dann kann gegen diese Schlüsse auch nicht etwa der Einwand erhoben werden, dass sie davon abhängig wären, ob wir eine physikalisch genau zutreffende Vorstellung von der Temperatur besitzen. Wir können z. B. Flächen gleicher Temperatur konstruiren, können deren Krümmungsverhältnisse, das Temperaturgefäll nach verschiedenen Richtungen hin u. s. f. berechnen, ohne dass die Resultate, zu denen wir dabei gelangten, irgendwie von der besonderen Art der gewählten geometrischen Abbildung der Funktion abhängig wären. In der That handelt es sich ja bei dieser nur um die übersichtliche Ordnung unserer Vorstellungen und Gedanken und gar nicht etwa um wirkliche physikalische Körper, an die wir ein Thermometer anlegen wollten, um die Temperaturvertheilung auf ihnen zu beobachten. Gerade so muss man ja auch sorgfältig zwischen der Curve unterscheiden, die der Funktion $y=f(x)$ entspricht und dem physikalischen Strich, durch den wir sie hinzeichnen, um unserer Vorstellungskraft einen Anhalt zu geben.

Ganz denselben Weg müssen wir auch einschlagen, um über den Sinn von Gl. (1), d. h. über den Begriff der Vectorfunktion ins Klare zu kommen. Ich habe so ausführlich die in den Anfangsgründen der Mathematik benutzten Veranschaulichungsmittel in die Erinnerung zurückgerufen, um in dem Leser den Wunsch zu erwecken, das dort Bewährte auf seine

Verwendbarkeit in dem allgemeineren Falle, mit dem wir es hier zu thun haben, zu erproben. Es hiesse in der That mühsam im Dunkeln tappen, wenn man die allgemeinen Eigenschaften der Vectorfunktionen ohne eine Veranschaulichung studiren wollte, während durch die Benutzung dieses Hilfsmittels ein so helles Licht auf unseren Weg geworfen wird, dass man sich ohne jede Schwierigkeit zurecht finden kann.

Die geometrische Abbildung, die sich am besten zur Darstellung der Funktion $\mathbf{v} = f(\mathbf{r})$ eignet, ist die hydrodynamische. Sie leistet für die Vectorfunktionen reichlich dasselbe wie die Curve für die scalaren Funktionen. Wir ersetzen bei ihr die Funktion selbst wieder durch ein Feld, aber durch ein Feld, das unsrer Anschauung ohne Weiteres gegeben ist. Zu diesem Zwecke denken wir uns den ganzen Raum durch eine incompressible Flüssigkeit, aber nicht etwa durch Wasser oder irgend einen anderen flüssigen Körper, sondern durch eine mit ganz willkürlichen Eigenschaften eigens zu diesem Zwecke erdachte Flüssigkeit erfüllt, die den Gesetzen der Mechanik durchaus nicht unterworfen zu sein braucht, von der wir vielmehr gerade nur verlangen, dass sie flüssig sei, d. h. dass die Geschwindigkeit an benachbarten Stellen in willkürlicher Weise wechseln kann. Es ist nur eine Folge der Beschränkung, die wir unserer Untersuchung von vornherein auferlegt haben, dass dieser Wechsel in der Geschwindigkeit hier immer stetig, sonst aber ganz beliebig vorausgesetzt wird. An jeder Stelle des Raumes denken wir uns die Geschwindigkeit nach Grösse und Richtung so gewählt, dass die abhängige Variable $\mathbf{v}$ der Gleichung (1) durch sie unter Zugrundelegung eines passenden Massstabes dargestellt wird, während die unabhängige Variable $\mathbf{r}$ natürlich nach wie vor den Radiusvector bezeichnet, durch den die Stelle im Felde angegeben wird, auf die sich $\mathbf{v}$ bezieht.

Durch diese hydrodynamische Construction allgemeinsten Art kann offenbar jede beliebige Vectorfunktion von einer unabhängigen Variablen geometrisch dargestellt werden. Die Strömung in einer Wassermasse würde dazu hingegen nicht

ausreichen; bei ihr würde die Continuitätsbedingung hindernd im Wege stehen, während wir für unsere fingirte Flüssigkeit über dieses Hinderniss leicht hinwegkommen können.

Betrachtet man ein Volumenelement $dx dy dz$ und berechnet man, wie viel aus seinen 6 Seitenflächen in der Zeiteinheit mehr ausströmt als einströmt, wenn die Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ durch Gl. (1) oder die Componenten von $\mathbf{v}$ durch die Gleichungen (2) gegeben sind, so erhält man

$$\left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

Für den in der Klammer stehenden Ausdruck, der von der Wahl des Coordinatensystems ganz unabhängig ist, benutzen wir die von einer solchen Bezugnahme ebenfalls freie Bezeichnung $\text{div } \mathbf{v}$. Bei einer gewöhnlichen incompressiblen Flüssigkeit wäre es physikalisch unmöglich, dass aus einem gegebenen Raumtheile, der dauernd ganz mit Flüssigkeit angefüllt ist, mehr ausströmt als einströmt oder umgekehrt, d. h. $\text{div } \mathbf{v}$ müsste nothwendig gleich Null sein. Man könnte also mit Hülfe einer Wasserströmung oder mit Hülfe einer hydrodynamischen Construction im engeren Sinne nur ganz specielle Vectorfunctionen abbilden, nämlich solche, für die $\text{div } \mathbf{v}$ im ganzen Raume Null ist. Die von uns erdachte ideale Flüssigkeit ist aber solchen Beschränkungen nicht unterworfen. Nichts hindert uns, anzunehmen, dass an gewissen Stellen des Raumes Flüssigkeit immer neu erzeugt, an anderen Flüssigkeit fortwährend vernichtet wird. Stellen der ersten Art wollen wir als Quellen, die der zweiten Art als Sinkstellen oder auch als negative Quellen bezeichnen. Zugleich behalten wir uns vor, das Wort Quelle auch in dem allgemeineren Sinne zu gebrauchen, dass es gleichzeitig die eigentlichen oder positiven und die negativen Quellen umfasst. Die Gesammtheit aller Quellen, die zu einer gegebenen Vectorfunktion $\mathbf{v} = f(\mathbf{r})$ gehören, nennen wir ihr Quellensystem.

Denkt man sich eine Quelle von endlicher Ergiebigkeit in einem Punkte concentrirt, so müssen, wie leicht einzusehen ist, in der nächsten Umgebung dieses Punktes unendlich grosse

Geschwindigkeiten auftreten. Eine solche Geschwindigkeitsvertheilung kann nur als Grenzfall für uns in Betracht kommen. Wir müssen uns daher die Quellen über den Raum vertheilt denken, derart, dass auf das vorher besprochene Volumenelement $dx dy dz$ eine Quelle von solcher Ergiebigkeit fällt, dass der Ueberschuss der Ausströmung über die Einströmung durch sie gedeckt wird. Die Ergiebigkeit dieser Quelle ist demnach unendlich klein von der dritten Ordnung wie das Volumenelement selbst und diesem proportional. Auf die Volumeneinheit umgerechnet stellt sich die Ergiebigkeit, die in solcher Weise ausgedrückt mit q bezeichnet werden möge, auf

$$q = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} = \operatorname{div} \mathbf{v}. \quad (5)$$

§ 4. Allgemeine Eigenschaften eines Quellensystems.

Wir denken uns in dem Felde irgend ein geschlossenes Gebiet abgegrenzt. Nach der Bedingung der Unzusammendrückbarkeit findet man aus der Ergiebigkeit aller in dem Gebiete enthaltenen Quellen, wie viel Flüssigkeit durch die Oberfläche des Raumes mehr aus- als einströmt. Die Gleichung, die dies ausspricht, ist für den besonderen Fall, dass $\mathbf{v} = f(\mathbf{r})$ ein Kraftfeld darstellt, das dem Newtonschen Gravitationsgesetze unterworfen ist, unter dem Namen des Gauss'schen Satzes bekannt; sie ist indessen, wie wir sehen, viel allgemeiner gültig, da sie eine Eigenschaft aller Vectorfunktionen angibt. Bezeichnen wir mit df ein Element der Grenzfläche, mit $\mathbf{n}_\alpha$ die nach aussen gerichtete Einheitsnormale, mit $\mathbf{v} \mathbf{n}_\alpha$ das scalare oder innere Produkt dieser beiden Grössen, d. h. das Produkt aus ihren Absolutbeträgen und dem Cosinus des von ihren Richtungen eingeschlossenen Winkels und mit $d\tau$ ein Volumenelement des Gebiets, so ist

$$\int \mathbf{v} \mathbf{n}_\alpha df = \int \operatorname{div} \mathbf{v} d\tau = \int q d\tau. \quad (6)$$

Diese Gleichung kann auch auf den ganzen unendlichen Raum angewendet werden. — Wir wollten nur solche Felder behandeln, die nicht ins Unendliche reichen und können jetzt

den Sinn dieser Voraussetzung näher bestimmen. Zu diesem Zwecke denken wir uns eine Kugel, deren Halbmesser fortwährend wächst, während ihr Mittelpunkt an irgend einer Stelle des Feldes bleibt, an der $\mathfrak{v}$ einen endlichen Werth hat. Wenn der Halbmesser der Kugel genügend gross geworden ist, soll $\mathfrak{v}$ ausserhalb der Kugel nur noch unendlich klein sein und es soll ferner der Fehler, den wir dadurch begehen, dass wir das Feld ausserhalb der Kugel ganz vernachlässigen, gegen Null convergiren, wenn der Radius der Kugel ins Unendliche wächst. Dazu gehört natürlich, dass die Flüssigkeitsmenge, die durch die Kugeloberfläche strömt, in der Grenze selbst zu Null wird. Der Vector $\mathfrak{v}$ muss daher bei unendlich wachsendem $\mathfrak{r}$ im Allgemeinen unendlich klein von der dritten Ordnung werden.

Mit Rücksicht auf diese beschränkende Voraussetzung, die wir unserer Untersuchung auferlegt haben, erhalten wir nach Gl. (6)

$$\int^{\infty} q d\tau = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

wenn das Zeichen ∞ eine Integration über den ganzen unendlichen Raum anzeigt. Die Summe aller positiven Quellen muss daher ebenso gross sein als die aller Sinkstellen. Von den elektrischen und magnetischen Massen der älteren Elektrizitätslehre hat man von jeher angenommen, dass ihre algebraische Summe für das ganze Feld zu Null werden müsse und wir haben uns jetzt davon überzeugt, dass dies eine nothwendige Folge der aus den Beobachtungen erschlossenen Eigenschaft der elektrischen und magnetischen Felder ist, dass sie nicht ins Unendliche reichen.

Wir wollen ferner den Werth des Raumintegrals

$$\mathfrak{F} = \int^{\infty} \mathfrak{v} d\tau \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

feststellen. Es spielt für die Vectorfunktionen eine ähnliche

Rolle wie das Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} y dx$ für die scalaren Funktionen;

man kann es als die Feldsumme bezeichnen. Die durch das Integralzeichen vorgeschriebene Summirung ist eine geometrische.

Zunächst sei angenommen, dass das Feld keine Quellen hat, dass also $\text{div } \mathbf{u}$ überall Null ist. Wir denken uns durch alle Punkte des Feldes Linien gezogen, die überall in der Richtung von $\mathbf{u}$ gehen. Diese Stromlinien können nach der unserer Untersuchung allgemein zu Grunde liegenden Voraussetzung nicht ins Unendliche reichen. Sie können ferner keine Endpunkte haben, weil keine Quellen vorkommen sollten, auch unendlich viele Windungen im Endlichen können sie nicht machen, weil dies gegen die Voraussetzung der Stetigkeit verstossen würde und sie müssen daher in sich zurückkehrende Linien sein.

Erstreckt man die Integration in Gl. (8) über einen einzelnen in sich geschlossenen Stromfaden, dessen Oberfläche aus lauter Stromlinien zusammengesetzt wird, so erhält man den Werth Null. Denn $\mathbf{u} d\tau$ kann gleich $f v d\mathfrak{s}$ gesetzt werden, wenn unter f der Querschnitt des Fadens, unter v der Absolutbetrag von $\mathbf{u}$ und unter $d\mathfrak{s}$ ein Element der Mittellinie des Fadens verstanden wird. Das Produkt $f v$ ist aber für alle Querschnitte des Fadens constant, weil keine Quellen vorkommen und durch die Oberfläche des Fadens keine Strömung stattfindet, während die geometrische Summe aller Linienelemente einer geschlossenen Curve gleich Null ist.

Der ganze Raum wird aber hier aus solchen Stromfäden zusammengesetzt und wir schliessen daraus, dass die Feldsumme für ein quellenfreies Feld gleich Null ist. Wir können hiernach von den in sich zurückkehrenden Strömungen bei der Berechnung der Feldsumme ganz absehen.

Ferner sei jetzt angenommen, dass im Felde nur zwei punktförmige Quellen $+Q$ und $-Q$ vorkommen. Alle von $+Q$ ausgehenden Stromlinien müssen dann in $-Q$ endigen. Wird der von der Quelle nach der Sinkstelle gerechnete Abstand nach Grösse und Richtung mit $\mathbf{a}$ bezeichnet und die Integration, in derselben Weise wie vorher, zunächst auf einen einzelnen Stromfaden ausgedehnt, so erhält man $f v \mathbf{a}$ und daher, weil die Summe aller $f v$ die ganze Ergiebigkeit Q der Quelle liefert,

$$\mathfrak{F} = \int \mathfrak{v} d\tau = Q\mathfrak{a}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Dieses Resultat lässt sich leicht auf den Fall eines beliebigen Quellensystems übertragen. Man wähle im Felde einen Anfangspunkt, von dem man die Radienvectoren $\mathfrak{r}$ rechnet. Zu jeder Quelle $q d\tau$ im Volumenelemente $d\tau$ nehme man im Anfangspunkt eine Quelle entgegengesetzten Vorzeichens $-q d\tau$ an. Für das aus diesem Paare bestehende Quellensystem kann man Gl. (9) anwenden. Summirt man dann über alle $q d\tau$ des gegebenen Quellensystems, so erhält man demnach

$$\mathfrak{F} = - \int q \mathfrak{r} d\tau. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Die Summe der Quellen $-q d\tau$ im Anfangspunkt verschwindet nämlich nach Gl. (7) und das ganze Feld erhält man durch die Superposition aller Quellenpaare $q d\tau$ und $-q d\tau$.

Die Wahl des Punktes, von dem man die $\mathfrak{r}$ in dieser Gleichung zählt, ist übrigens gleichgültig. Denn wählt man einen anderen Punkt, von dem der Radiusvector $\mathfrak{r}_0$ nach dem ersten Anfangspunkt geht, so erhält man

$$\int q(\mathfrak{r} + \mathfrak{r}_0) d\tau = \int q \mathfrak{r} d\tau + \mathfrak{r}_0 \int q d\tau = \int q \mathfrak{r} d\tau,$$

ein Resultat, das nach Gl. (10) selbstverständlich ist.

Bei der Ableitung von Gl. (10) habe ich den Satz von der Zulässigkeit der Superposition vorweg genommen, der späterhin noch näher begründet werden wird.

§ 5. Wirbelfreie Felder.

Wir ziehen im Felde eine beliebige Curve, bezeichnen ein Element der Curve mit $d\mathfrak{s}$ und bilden das scalare (oder nach der Grassmann'schen Bezeichnung das innere) Produkt $\mathfrak{v} d\mathfrak{s}$, also das Produkt aus den Absolutbeträgen von $\mathfrak{v}$ und $d\mathfrak{s}$ und dem Cosinus des von den beiden Richtungen eingeschlossenen Winkels. Die algebraische Summe dieser Produkte für irgend einen gegebenen Integrationsweg wird das Linienintegral des

Vectors $\mathbf{v}$ genannt. Verschwindet dieses Linienintegral für jeden beliebigen geschlossenen (d. h. zum Anfangspunkt zurück kehrenden) Integrationsweg im ganzen Felde, so wird das Feld ein wirbelfreies genannt. Auch die Vectorfunktion, durch die das Feld analytisch dargestellt wird, soll in diesem Falle als wirbelfrei bezeichnet werden. Ist die Gleichung

$$\int_A^A \mathbf{v} d\mathbf{s} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

nicht im ganzen Felde, sondern nur innerhalb eines im Felde abgegrenzten, einfach zusammenhängenden Gebiets für jede in diesem Gebiete verlaufende geschlossene Curve erfüllt, so soll gesagt werden, dass das Feld in diesem Gebiete, oder dass die Vectorfunktion innerhalb dieses Bereiches für die Werthe der unabhängigen Veränderlichen wirbelfrei ist. — Man sieht wie hier Begriffe und Methoden der gewöhnlichen Funktionentheorie in erweiterter Fassung wiederkehren.

In einem Gebiete, für das Gl. (11) erfüllt ist, führt jeder Integrationsweg zwischen zwei gegebenen Punkten A und B zu demselben Werthe für das Linienintegral, d. h. es ist, wenn mit $d\mathbf{s}$ und $d\mathbf{s}'$ die Elemente von zwei verschiedenen zwischen A und B verlaufenden Curven bezeichnet werden,

$$\int_B^A \mathbf{v} d\mathbf{s} = \int_B^A \mathbf{v} d\mathbf{s}', \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

weil nach Gl. (11)

$$\int_A^B \mathbf{v} d\mathbf{s} + \int_B^A \mathbf{v} d\mathbf{s}' = 0$$

ist. Man wähle in einem solchen Gebiete einen beliebigen Anfangspunkt O und setze für einen zweiten Punkt A des Gebiets

$$V_A = V_O + \int_A^O \mathbf{v} d\mathbf{s}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Bis auf die beliebig zu wählende Constante V_O ist hierdurch die Grösse V_A eindeutig bestimmt. Wenn das Feld ein

Kraftfeld ist, nennt man V_A das Potential im Punkt A und daher V_O das Potential im Punkt O . Ist das zu untersuchende Feld ursprünglich schon ein Geschwindigkeitsfeld, wie bei den eigentlichen hydrodynamischen Untersuchungen, so heisst V das Geschwindigkeitspotential. In unserem Falle ist das Feld oder die Vectorfunktion $\mathbf{v}$ nur hydrodynamisch konstruirt, während die wahre physikalische Bedeutung von $\mathbf{v}$ und selbst die von $\mathbf{r}$ ganz offen gelassen werden können. Um eine kurze Bezeichnung zu haben, wollen wir aber auch im allgemeinsten Falle die durch Gl. (13) definirte Grösse als das Potential des Feldes oder auch als das innerhalb des gegebenen Bereiches zur Vectorfunktion $\mathbf{v} = f(\mathbf{r})$ gehörige Potential bezeichnen.

Im Allgemeinen bleibt die Constante V_O in Gl. (13) ganz willkürlich. Wenn aber das ganze Feld und nicht nur, wie seither angenommen, einzelne Gebiete davon wirbelfrei sind, wollen wir uns die Constante V_O immer durch die Bedingung bestimmt denken, dass V im Unendlichen gleich Null wird, d. h. wir setzen in diesem Falle

$$V = \int_A^\infty \mathbf{v} d\mathbf{s}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Dabei bleibt es ganz gleichgültig, wo wir uns den Endpunkt im Unendlichen denken wollen, da die Funktion dort überall verschwindet. — Da $d\mathbf{s} = d\mathbf{r}$ ist, kann Gl. (14) mit Rücksicht auf Gl. (1) auch in der Form

$$V = \int_{\mathbf{r}}^\infty f(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

geschrieben werden und hierdurch ist jeder wirbelfreien Vectorfunktion eine Funktion eindeutig zugeordnet, die ein scalares Feld liefert und die in gewissem Sinne als ein Integral der gegebenen Funktion bezeichnet werden kann. In der That ist sie ganz von der Form $\int_x^\infty f(x) dx$ der gewöhnlichen Analysis.

Man muss aber dabei beachten, dass Vectorfunktionen Integrale verschiedener Art zulassen. Ein solches ist uns schon

in der „Feldsumme“ entgegengetreten und andere Integrale werden uns später noch näher beschäftigen.

Das scalare Feld V heisst das Potentialfeld des gegebenen Vectorfeldes. Schon durch Gl. (5) war jedem Vectorfelde — und hier auch dem nicht wirbelfreien — ein scalares Feld, nämlich das Quellenfeld q zugeordnet worden, das durch eine Differentialoperation aus dem Vectorfelde abgeleitet wurde. Unsere nächste Aufgabe wird darin bestehen, den weiteren Zusammenhang zwischen den 3 Feldern $\mathbf{v}$, V , q aufzudecken.

§ 6. Ableitung des Vectorfeldes aus dem Potentialfelde.

Gegeben sei ein scalares Feld oder eine eindeutige scalare Funktion von $\mathbf{r}$

$$V = f(\mathbf{r})$$

nach Gl. (3). Wir denken uns Flächen construirt, die Punkte von gleichem V mit einander verbinden. Geht man von irgend einem Punkte des Feldes um das unendlich kleine Stück $d\mathbf{r}$ weiter, so ändert sich V im Allgemeinen. Die Aenderung wird nur dann zu Null, wenn entweder V in der Umgebung des gewählten Punktes constant ist oder wenn die Richtung von $d\mathbf{r}$ in die Tangentialebene der vorher erwähnten äquipotentiellen Fläche fällt. Unter der Voraussetzung, dass V abnimmt, wenn wir um $d\mathbf{r}$ weiter gehen, wollen wir die Aenderung dV getheilt durch die Länge von $d\mathbf{r}$ als das Gefäll von V in dieser Richtung bezeichnen. Den grössten Werth nimmt das Gefäll in der Richtung einer Normalen zur äquipotentiellen Fläche an. Wir bezeichnen das Gefäll in dieser Richtung mit $\mathbf{v}$, wodurch $\mathbf{v}$ als gerichtete Grösse bestimmt ist und setzen zur Abkürzung

$$\mathbf{v} = - \nabla V. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Das Operationszeichen ∇ ist dadurch vollständig definirt. Dass ein Minuszeichen vorgesetzt wurde, erklärt sich damit, dass ein Differentialquotient (und um eine räumliche Differentiation handelt es sich hier offenbar) positiv gerechnet wird, wenn

die zugehörige Grösse wächst, während wir hier das Gefäll, also die Abnahme der Grösse V bestimmen wollten.

Um aus dem räumlichen Differentialquotienten ∇V das Differential dV zu erhalten, genügt es, mit der Länge von $d\mathbf{r}$ zu multipliciren, falls $d\mathbf{r}$ in die Richtung der Normalen zur äquipotentiellen Fläche fällt. Im anderen Falle kommt es nur auf den Antheil von $d\mathbf{r}$ an, der in die Richtung dieser Normalen fällt, d. h. wir müssen den Absolutbetrag von ∇V mit der Projection von $d\mathbf{r}$ auf die Normale oder auf die Richtung von ∇V multipliciren. In jedem Falle erhalten wir daher das Differential dV , das zu einer Aenderung $d\mathbf{r}$ der unabhängigen Variabeln gehört durch innere geometrische Multiplication von ∇V und $d\mathbf{r}$, oder

$$dV = d\mathbf{r} \cdot \nabla V. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Die Beziehung auf ein Coordinatensystem ist bei dieser Betrachtung ganz überflüssig; man braucht aber darum die Benutzung eines solchen nicht vollständig abzulehnen. Es sei daher noch darauf hingewiesen, dass die drei rechtwinkligen Componenten von $\mathbf{u} = -\nabla V$ die Gefälle in den drei Coordinatenrichtungen angeben, dass also ∇V in Form einer geometrischen Summe

$$\nabla V = \mathbf{i} \frac{\partial V}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial V}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial V}{\partial z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

dargestellt werden kann. Unter $\mathbf{i} \mathbf{j} \mathbf{k}$ sind hierbei Einheitsvectoren in den drei Coordinatenrichtungen zu verstehen.

Setzt man diesen Werth von ∇V in Gl. (17) ein und ersetzt man in ihr auch $d\mathbf{r}$ durch seine drei Componenten $\mathbf{i}dx, \mathbf{j}dy, \mathbf{k}dz$, so erhält man beim Ausmultipliciren

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz, \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

also ein selbstverständliches Resultat.

Das nach Gl. (16) aus einem beliebigen scalaren Felde V abgeleitete Gefällfeld (wie wir es mit Rücksicht auf seine Entstehung nennen können) ist immer wirbelfrei. Aus Gl. (17) folgt nämlich

$$dV = -\mathbf{v} d\mathbf{r} \quad \text{und daher} \quad V_2 - V_1 = - \int_1^2 \mathbf{v} d\mathbf{r}. \quad (20)$$

Da V eine eindeutige Funktion sein sollte, wird das Linienintegral immer zu Null, wenn wir es auf eine geschlossene Curve erstrecken.

Wir haben hier den Zusammenhang zwischen $\mathbf{v}$ und V in anderer Weise definirt als im vorigen Paragraphen. Dort gingen wir von einem wirbelfreien Vectorfelde $\mathbf{v}$ aus und gelangten durch eine bestimmte Art der Integration zu dem Potentialfelde V ; hier sind wir umgekehrt von dem scalaren Felde V ausgegangen und haben daraus $\mathbf{v}$ durch die Differentialoperation $-\nabla$ abgeleitet. Gl. (20) stimmt aber mit der Gl. (13) des vorigen Paragraphen überein; die eine Operation ist daher die Umkehrung der anderen und es ist gleichgültig, ob wir den Zusammenhang zwischen $\mathbf{v}$ und V auf die eine oder die andere Art definiren.

§ 7. Ableitung des Vectorfeldes aus dem Quellenfelde.

Nach Gl. (5) kann zu jedem Vectorfelde das ihm zugeordnete Quellenfeld ermittelt werden. Wir kehren diese Aufgabe jetzt um und suchen das Vectorfeld auf, das zu einem gegebenen Quellensystem gehört. In dieser Form ist die Aufgabe indessen noch nicht eindeutig bestimmt. Man sieht dies sofort ein, wenn man bedenkt, dass das Quellensystem durch eine Differentialoperation aus dem Vectorfelde gefunden wird, dass wir also hier eine Integration auszuführen haben, bei der immer noch eine gewisse Willkür bleibt, die nur durch besondere Bedingungen gehoben werden kann.

Ich werde zunächst beweisen, dass die Aufgabe eindeutig bestimmt wird, wenn wir das aufzusuchende Vectorfeld der Bedingung unterwerfen, dass es im ganzen Raume wirbelfrei sein soll. Zu diesem Zwecke betrachte ich zwei wirbelfreie Vectorfelder (oder Vectorfunktionen) $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$, von denen ich voraussetze, dass sie zu dem gleichen Quellensysteme gehören. Im ganzen Raume soll also sein

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_1 = \operatorname{div} \mathbf{v}_2; \quad \int_A^A \mathbf{v}_1 d\mathbf{s} = 0; \quad \int_A^A \mathbf{v}_2 d\mathbf{s} = 0 \quad . \quad (21)$$

und ausserdem sollen beide Funktionen natürlich jene Bedingungen erfüllen, die wir von allen Funktionen, die hier behandelt werden, voraussetzen.

Aus beiden Feldern kann ich ein neues Feld $\mathbf{v}$ ableiten, indem ich $\mathbf{v}$ an jeder Stelle entweder gleich der geometrischen Summe oder gleich der geometrischen Differenz von $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ setze. Beide Fälle kommen für die weiteren Entwicklungen in Betracht und ich will sie daher gleich gemeinsam erledigen, indem ich setze

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 \pm \mathbf{v}_2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

wobei nach Belieben das obere oder das untere Vorzeichen genommen werden kann. Aus der Definition von div in Gl. (5) folgt sofort

$$\operatorname{div} (\mathbf{v}_1 \pm \mathbf{v}_2) = \operatorname{div} \mathbf{v}_1 \pm \operatorname{div} \mathbf{v}_2$$

Zugleich folgt aus dem Begriffe des scalaren oder inneren Produkts

$$(\mathbf{v}_1 \pm \mathbf{v}_2) d\mathbf{s} = \mathbf{v}_1 d\mathbf{s} \pm \mathbf{v}_2 d\mathbf{s}.$$

Wählt man überall das untere Vorzeichen, so erhält man nach den Gl. (21) für das Differenzfeld $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad \text{und} \quad \int_A^A \mathbf{v} d\mathbf{s} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

Das Differenzfeld $\mathbf{v}$ ist also im ganzen Raume zugleich wirbelfrei und quellenfrei. Ein solches Feld muss aber nothwendig überall verschwinden. Denn wäre es nicht überall Null, so könnte man Stromlinien durch alle Punkte des Feldes legen, die überall in der Richtung von $\mathbf{v}$ gehen. In solchen Gebietstheilen, in denen etwa $\mathbf{v}$ Null wäre, kann man diese Linien nach Belieben weiter ziehen; nur ins Unendliche sollen sie auf diese Weise nicht fortgesetzt werden. Verfolgt man nun eine solche Stromlinie, so muss sie entweder in sich zurückkehren oder sie muss Endpunkte im Endlichen haben, denn ins Unendliche kann sie sich nicht erstrecken, weil wir

von allen Feldern, die wir behandeln, voraussetzen, dass sie nicht ins Unendliche reichen. Endpunkte wären nur möglich an Stellen mit Quellen und diese sind hier ausgeschlossen. Aber auch geschlossene Stromlinien können nicht vorkommen, da das Feld $\mathbf{v}$ zugleich wirbelfrei ist. Demnach muss $\mathbf{v}$ überall Null sein, d. h. $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ sind identisch mit einander. Es gibt also in der That nur eine einzige Lösung der Aufgabe, eine wirbelfreie Vectorfunction zu einem gegebenen Quellsystem zu ermitteln. Dass es immer eine Lösung gibt, beweisen wir dadurch, dass wir sie wirklich bilden.

Wählt man das obere Vorzeichen in Gl. (22), so gehen die Gleichungen (23) mit Benutzung der Abkürzung q für die Quellenintensität $\text{div } \mathbf{v}$ über in

$$q = q_1 + q_2 \quad \text{und} \quad \int_A^A \mathbf{v} d\mathbf{s} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Das aus $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ resultirende Feld ist daher auch wirbelfrei und seine Quellen ergeben sich durch algebraische Summirung aus den Quellen der Theilfelder. Zerlege ich also das gegebene Quellsystem q in zwei oder mehr Theile, suche dann zu diesen Theilen die wirbelfreien Felder $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ u. s. w. auf und bilde daraus durch geometrische Summirung das resultirende Feld $\mathbf{v}$, so ist dieses erstens wirbelfrei und zweitens gehört es zu dem ursprünglich gegebenen Quellsysteme q . Ich finde also damit eine und, wie aus den vorausgehenden Betrachtungen folgt, zugleich die einzige Lösung der Aufgabe, das zu q gehörige wirbelfreie Feld $\mathbf{v}$ zu bestimmen.

Hiermit ist der Weg, den wir einzuschlagen haben, genau vorgezeichnet. Zunächst sondere ich aus dem Quellsysteme q nur die dreifach unendlich kleine Quelle $q d\tau$ aus, die zu irgend einem Volumenelement $d\tau$ gehört und ermittle, was sie für sich genommen zu dem Felde $\mathbf{v}$ beiträgt. Durch eine Kugelfläche vom Radius a , deren Mittelpunkt in $d\tau$ liegt, geht die Flüssigkeitsmenge $q d\tau$ und da der geometrische Raum, um den es sich hier allein handelt, nach allen Seiten gleich beschaffen ist, muss die Strömung an allen Stellen der Kugel-

oberfläche in der Richtung des Radius $\mathbf{a}$ gehen und von gleicher Grösse sein. Anstatt mich auf diese Symmetrieeigenschaft des Raumes zu berufen, könnte ich dies übrigens auch daraus beweisen, dass die Strömung andernfalls unmöglich wirbelfrei sein könnte. Die Stromgeschwindigkeit ist daher im Abstände a gleich $q d\tau / 4\pi a^2$ und um sie auch der Richtung nach darzustellen setze ich

$$d\mathbf{v} = \frac{q d\tau \mathbf{a}}{4\pi a^3} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (25)$$

In endlichen Abständen von $d\tau$ ist dieser Beitrag $d\mathbf{v}$ zu dem ganzen Vectorfelde unendlich klein von der dritten Ordnung. Er ist aber auch auf der Oberfläche von $d\tau$ noch unendlich klein von der ersten Ordnung und wir brauchen daher nicht näher zu untersuchen, wie sich die Strömung auf dieser Oberfläche selbst vertheilt, da der Beitrag $d\mathbf{v}$, selbst an dieser Stelle, gegenüber jenem verschwindet, der von den in endlicher Entfernung liegenden Quellen herrührt.

Aus Gl. (25) erhalten wir jetzt die Lösung für das ganze Quellensystem durch Ausführung einer Integration über den ganzen Raum, also

$$\mathbf{v} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{q \mathbf{a}}{a^3} d\tau \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (26)$$

Bei dieser Herleitung liess ich für einen Augenblick die Voraussetzung fallen, dass sich die Felder nicht ins Unendliche erstrecken sollten, denn das zu der isolirten Quelle $q d\tau$ gehörige Feld erstreckt sich in der That ins Unendliche. Da es aber nur eine einzige Lösung der Aufgabe gibt, ist es gleichgültig, auf welchem Wege ich sie herleite. Dass der in Gl. (26) gegebene Werth alle Bedingungen erfüllt, geht aus der Ableitung ohne Weiteres hervor.

§ 8. Herleitung des Potentialfeldes aus dem Quellenfelde.

Die gewöhnliche Potentialtheorie sucht die Verwendung einer Vectorfunktion, wie sie in Gl. (26) vorkommt, zu vermeiden. Sie zieht es vor, solche Aufgaben mit Hülfe scalarer

Felder zu lösen. Beim wirbelfreien Felde ist dies leicht möglich. Es ist dazu nur nöthig, in derselben Art wie vorher $\mathfrak{v}$ das Potentialfeld V zu berechnen. Damit kennt man indirekt auch das Vectorfeld $\mathfrak{v}$, da es aus V durch Ausführung der Differentialoperation $-\nabla$ hervorgeht.

In ähnlicher Art wie bei den Untersuchungen des vorigen Paragraphen über die resultirenden Felder ergibt sich zunächst leicht, dass

$$V = \int_A^\infty \mathfrak{v} d\mathbf{r} = \int_A^\infty \mathfrak{v}_1 d\mathbf{r} + \int_A^\infty \mathfrak{v}_2 d\mathbf{r} = V_1 + V_2 \quad . \quad (27)$$

ist. Auch V kann daher durch eine Summirung aller Beiträge gefunden werden, die von den isolirt genommenen Quellen $q d\tau$ herrühren. Für die Einzelquelle $q d\tau$ hat die Strömung $d\mathfrak{v}$ den durch Gl. (25) angegebenen Werth. Daraus bildet man das Linienintegral für einen in radialer Richtung ins Unendliche gehenden Integrationsweg und erhält

$$dV = \int_a^\infty \frac{q d\tau}{4\pi a^2} da = \frac{q d\tau}{4\pi a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Darin bedeutet, wie früher, a den Abstand des Aufpunktes, für den man V berechnen will, von dem Volumenelemente $d\tau$. Das von dem ganzen Quellensysteme herrührende Potential erhält man aus der letzten Gleichung durch Ausführung einer Integration über alle Volumenelemente $d\tau$ des ganzen Raumes, also

$$V = \frac{1}{4\pi} \int \frac{q d\tau}{a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

Damit ist V in eindeutiger Weise berechnet, wenn das Quellensystem q gegeben ist. Umgekehrt konnte schon früher q berechnet werden, wenn V gegeben war. Es war dazu freilich ein Umweg über die zu beiden Funktionen gehörige Vectorfunktion $\mathfrak{v}$ erforderlich. Aus V ging nämlich $\mathfrak{v}$ durch die Differentialoperation $-\nabla$ und daraus weiter q durch Ausführung einer zweiten Differentialoperation, nämlich durch die Operation div hervor. Man hatte also

$$\mathfrak{v} = -\nabla V; \quad q = \operatorname{div} \mathfrak{v} = -\operatorname{div} \nabla V.$$

Zweckmässiger ist es aber, die beiden Differentialoperationen zu einer einzigen zusammenzufassen, die unmittelbar von V zu q führt. Dies ist sofort möglich, wenn wir eine Operation ∇^2 einführen, die durch den Ansatz

$$\operatorname{div} \nabla V = \nabla^2 V \quad \text{und daher} \quad q = -\nabla^2 V \quad . \quad (30)$$

definirt ist. Wenn man mit rechtwinkligen Coordinaten rechnet, erhält man durch die Verbindung der Gleichungen (5) und (18) für die unmittelbare Ausführung der Operation ∇^2 die Vorschrift

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (31)$$

An Stelle von Gl. (30) kann man daher auch setzen

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -q \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (32)$$

13. Von einem Faktor 4π abgesehen, der hier fehlt, ist dies die Laplace-Poisson'sche Differentialgleichung. Um diesen Faktor unterscheiden sich überhaupt viele Formeln, die ich hier abgeleitet habe und noch ableiten werde, von denen der gewöhnlichen Potentialtheorie. Dies liegt daran, dass man in dieser Theorie von vornherein Kraftfelder untersucht, die nach dem Gesetz des umgekehrten Quadrats der Entfernung von Massen ausgehen und dass man als Einheit dieser Massen jene definirt, die auf eine ihr gleiche in der Einheit der Entfernung die Einheit der Kraft ausübt. Die Rolle der Massen spielen hier die Quellen und das von selbst gegebene Maass für die Grösse einer Quelle ist ihre Ergiebigkeit. In der allgemeinen Theorie der Vectorfunktionen hat man gar keine Veranlassung, von diesem Maasse in willkürlicher Weise abzuweichen. Man kann indessen nachträglich alle Formeln leicht so umschreiben, dass sie mit jenen der Potentialtheorie übereinstimmen, indem man für q überall $4\pi m$ setzt, wenn m die specifische Masse bedeutet.

Wir haben jetzt alle Hauptfragen beantwortet, die sich über den Zusammenhang der wirbelfreien Vectorfunktion $\mathfrak{v}$ mit

den beiden ihr zugeordneten scalaren Funktionen V und q stellen lassen. Schliesslich möge indessen noch eine Frage berührt werden, die zwar an sich von geringerer Bedeutung für die Geometrie der Felder ist, die aber wegen der Meinungsverschiedenheiten, die sich bei ihr geltend machten, einiges Interesse beansprucht.

Das Feld $\mathfrak{v}$ sei im ganzen Raume wirbelfrei; dann ist V eine eindeutig bestimmte Grösse. Man grenze irgend ein Gebiet im Felde ab, das auch mehrfach zusammenhängend sein kann. Ist auf der Grenzfläche V überall gleich gross und bestehen im Inneren keine Quellen, so muss $\mathfrak{v}$ überall im Innern des Gebietes gleich Null sein. Denn geschlossene Stromlinien sind nach Voraussetzung nicht möglich und auch Stromlinienenden können im Innern nicht vorkommen, weil die Quellen fehlen. Aber auch von aussen kann keine Stromlinie das Gebiet durchsetzen, weil sonst V an den beiden Schnittpunkten mit der Grenzfläche um den Betrag des Linienintegrals von $\mathfrak{v}$ verschieden wäre, was gegen die Voraussetzung verstösst. In der That muss also $\mathfrak{v}$ im Innern überall gleich Null sein.

Hieraus schliesst man weiter, dass $\mathfrak{v}$ im Innern des Gebietes eindeutig bestimmt ist, sobald V auf der Grenzfläche und die Quellen im Innern beliebig gegeben sind. Denn wären zwei Felder $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$ möglich, die diesen Bedingungen entsprächen, so müsste das Differenzfeld $\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_2$ auf der Grenzfläche zu einem konstanten Potentiale, nämlich zu dem Potentiale Null führen und im Innern des Raumes würden keine Quellen zu $\mathfrak{v}$ gehören. Nach dem vorher Bewiesenen muss dann $\mathfrak{v} = 0$ und daher $\mathfrak{v}_1 = \mathfrak{v}_2$ im Innern des Gebietes sein. Wesentlich ist bei dieser Beweisführung, dass $\mathfrak{v}$ im ganzen Raume wirbelfrei sein soll; in der That ist dies aber auch der einzige Fall, für den die Benutzung der Hilfsgrösse V von Wichtigkeit ist. Es hat daher keinen Zweck, andere Fälle in Betracht zu ziehen.

Der soeben abgeleitete Satz ist unter dem Namen des Dirichlet'schen Principis bekannt.

§ 9. Definition des Wirbels.

In § 5 ist nur ein Kennzeichen für die wirbelfreien Felder angegeben worden. Wir können danach nur ganz im Allgemeinen aussagen, dass Wirbel im Felde bestehen, wenn das Linienintegral von $\mathbf{v}$ nicht für jede geschlossene Curve verschwindet. Wir haben aber jetzt noch die Aufgabe, den Begriff des Wirbels selbst noch näher zu bestimmen.

Am einfachsten wäre es, eine Definitionsgleichung anzuschreiben und jede Erörterung darüber zu vermeiden, warum man gerade dieser Grösse die Bezeichnung Wirbel gegeben hat oder warum man sie als Mass für die im Felde vorhandenen Wirbel benutzt. Bei einem solchen Verfahren würde aber die Anschaulichkeit der Betrachtung, die wir in erster Linie anstreben müssen, um zu einem rechten Verständnisse der Sache zu gelangen, in hohem Grade geschädigt werden.

Aus diesem Grunde knüpfe ich zunächst an die Bedeutung des Wortes Wirbel im bürgerlichen Leben an. Aus eigener Anschauung kennt Jedermann die sich in ungefähr kreisförmigen Bahnen vollziehenden Bewegungen, die das Wasser in einem Flusslaufe an manchen Stellen, etwa unterhalb eines Brückenpfeilers oder eines ähnlichen Hindernisses ausführt und die man im ursprünglichen Sinne des Wortes als Wirbel bezeichnet. Wesentlich ist dabei in der Auffassung von aller Welt indessen nur die in sich zurückkehrende Bewegung, nicht die besondere Gestalt der Bahn, wenn wir sie uns auch in erster Annäherung als kreisförmig vorzustellen gewohnt sind. Es führt auch keine Aenderung des Begriffes herbei, wenn sich zu dieser kreisenden Bewegung noch eine andere gesellt, die etwa den ganzen Wirbel flussabwärts führt, wie wir es sogar gewöhnlich beobachten.

Solange wir es nur mit reinen Wirbelbewegungen zu thun haben, können wir diese also in Uebereinstimmung mit dem gewöhnlichen Sprachgebrauche als Bewegungen längs in sich geschlossener Bahnen bezeichnen. Da sich aber mit reinen Wirbelbewegungen auch noch andere vermischen können, müssen

wir uns nach einem bestimmteren Kennzeichen dafür umsehen, ob eine gegebene Geschwindigkeitsvertheilung einen wirbelnden Antheil besitzt oder nicht. Bei einer reinen Wirbelbewegung denke man sich eine der in sich zurückkehrenden Stromlinien herausgegriffen und für diese das Linienintegral $\int \mathbf{v}_1 d\mathbf{s}$ der Geschwindigkeit, die hier mit $\mathbf{v}_1$ bezeichnet ist, gebildet. Dieses Integral setzt sich aus lauter positiven Beiträgen zusammen, wenn der Umlaufssinn auf der Curve in Uebereinstimmung mit der Richtung von $\mathbf{v}_1$ gewählt wird. Es weicht also jedenfalls von Null ab. Tritt nun noch eine andere Feldcomponente $\mathbf{v}_2$ auf, die von Quellen herrühren möge, so ist $\int \mathbf{v}_2 d\mathbf{s}$ für jeden Integrationsweg gleich Null. Das Integral $\int \mathbf{v} d\mathbf{s}$ für die ganze Bewegung $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ ist demnach ebensogross als für den wirbelnden Antheil $\mathbf{v}_1$. Damit erklärt sich, weshalb eine Bewegung, bei der $\int \mathbf{v} d\mathbf{s}$ für jeden geschlossenen Integrationsweg verschwindet, als eine wirbelfreie bezeichnet wurde. Die Anweisung, jede in sich zurückkehrende Curve als möglichen Integrationsweg in Betracht zu ziehen, rechtfertigt sich damit, dass jede solche Curve als eine mögliche Stromlinie für eine reine Wirbelbewegung, die etwa in der gegebenen Geschwindigkeitsvertheilung als Antheil enthalten sein könnte, verdächtig ist.

Praktisch lässt sich diese Anweisung natürlich nicht durchführen. Man ist nicht im Stande, das Integral $\int \mathbf{v} d\mathbf{s}$ für alle möglichen Integrationswege wirklich auszurechnen. Man ersetzt daher die angegebene Bedingung durch eine andere, die ihr gleichwerthig ist und die sich leicht aus ihr ableiten lässt. Man macht dazu von dem Satze Gebrauch, dass jede wirbelfreie Bewegung aus einem Potentiale abgeleitet werden kann. Auch dann, wenn die Bewegung nicht im ganzen Raume, sondern nur in einzelnen Gebietstheilen wirbelfrei ist, ist es, wie wir früher sahen, wenigstens innerhalb dieser Gebietstheile möglich. Wir können uns solche Gebietstheile selbst unendlich klein denken, wenn es sich nur darum handelt, zu untersuchen, ob an einer bestimmten Stelle die Bewegung als wirbelfrei zu betrachten ist. Gerade durch diese Wendung

erzielt man die Vereinfachung des Kennzeichens für den Wirbel.

Bezeichnet man das Potential, von dem man innerhalb eines etwa unendlich klein zu denkenden Bezirks die Funktion $\mathfrak{v}$ ableiten kann, falls die Bewegung dort wirbelfrei ist, wie früher mit V , so hat man für die Componenten von $\mathfrak{v}$ die Ausdrücke

$$v_1 = -\frac{\partial V}{\partial x}; \quad v_2 = -\frac{\partial V}{\partial y}; \quad v_3 = -\frac{\partial V}{\partial z}, \quad \dots \quad (33)$$

woraus für die Differentialquotienten der v die Bedingungsgleichungen hervorgehen

$$\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0. \quad \dots \quad (34)$$

Es steht uns frei, diese drei Bedingungsgleichungen dadurch zu einer einzigen zu verschmelzen, dass wir die auf der linken Seite stehenden Differenzen als Componenten einer gerichteten Grösse $\mathfrak{w}$ ansehen. Wir haben dann auszusagen, dass $\mathfrak{w}$ überall gleich Null sein muss, wo die Bewegung wirbelfrei sein soll und umgekehrt, denn man weiss, dass die Gleichungen (34) nicht nur die nothwendige, sondern auch die hinreichende Bedingung für die Möglichkeit des Ansatzes (33) bilden.

Eine Grösse, von deren Verschwinden das Nichtbestehen eines Wirbels an einer bestimmten Stelle abhängt, ist offenbar selbst geeignet, ein Mass für den Wirbel an dieser Stelle abzugeben. Man kann nur darüber im Zweifel sein, ob es nicht noch andere Grössen gibt, von denen dasselbe zutrifft und die sich aus anderen Gründen vielleicht noch besser dazu eignen, den Wirbel zu messen. Offenbar könnte man auch irgend ein Vielfaches von $\mathfrak{w}$ als Mass für den Wirbel verwenden und in der That hat Helmholtz bei seinen hydrodynamischen Untersuchungen die Hälfte von $\mathfrak{w}$ dazu gewählt. Er kam dazu durch den Vergleich der Wasserbewegung mit der Bewegung eines starren Körpers. Es lässt sich indessen nicht verkennen, dass bei dieser Festsetzung doch eine gewisse Willkür mit unterläuft. Ich halte es daher für besser, bei der allgemeinen Theorie der Vectorfunktionen, die alle physi-

kalischen Felder umfassen soll, von jeder Beifügung eines solchen willkürlichen Faktors abzusehen und die Grösse $\mathfrak{w}$ selbst als Mass des Wirbels einzuführen. Im anderen Falle würden unsere Formeln nur zwecklos mit einem an sich ganz gleichgültigen Faktor belastet.

Wir setzen also

$$\mathfrak{w} = \mathfrak{i} \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \right) + \mathfrak{j} \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \right) + \mathfrak{k} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \quad (35)$$

oder, wie man dafür übersichtlicher in Form einer Determinante schreiben kann,

$$\mathfrak{w} = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (36)$$

Um für die hiermit genau umschriebene Operation an der Vectorfunktion $\mathfrak{v} = f(\mathfrak{r})$, die von der Wahl des besonderen Coordinatensystems, wie man sich leicht überzeugt, ganz unabhängig ist, eine kurze Bezeichnung zu besitzen, setzen wir überdies zur Abkürzung für Gl. (35) oder (36)

$$\mathfrak{w} = \text{curl } \mathfrak{v} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (37)$$

und nennen immer wenn diese Gleichung besteht $\mathfrak{w}$ den Wirbel der Funktion $\mathfrak{v}$.

Um ein Missverständniss zu vermeiden, dem der Anfänger sonst leicht anheimfällt, mache ich noch ausdrücklich darauf aufmerksam, dass auch z. B. in einem reinen Wirbelfelde die Bewegung an einzelnen Stellen des Feldes wirbelfrei sein kann, obschon die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ dort keineswegs verschwindet. Wir werden später sehen, dass sich der Sitz des Wirbels oft nur in einzelnen Wirbelfäden befindet, während alle übrigen Theile des Feldes wirbelfrei sind. Dagegen wirbelt z. B. die Flüssigkeit, die sich in einem rotirenden Gefässe und in relativer Ruhe zum Gefässe befindet, an allen Stellen.

Zweites Capitel.

Die linearen Vectorfunktionen.

§ 10. Definition der linearen Vectorfunktion.

Als lineare Funktion einer unabhängigen Veränderlichen wird in der gewöhnlichen Analysis ein Ausdruck von der Form

$$y = ax + b \dots \dots \dots (38)$$

bezeichnet und zwar desshalb, weil die geometrische Darstellung der Funktion eine gerade Linie liefert. Wenn wir den Begriff der linearen Abhängigkeit auf die Funktionen von gerichteten Grössen übertragen wollen, dürfen wir uns nicht einfach an den Ansatz (38) halten, da wir über die Verknüpfungen, die sich mit Grössen dieser Art vornehmen lassen, von vornherein keine hinreichend umfassende Kenntniss besitzen können. Wir müssen vielmehr die Bezeichnung als lineare Funktion lediglich davon abhängig machen, dass das Aenderungsgesetz von $\mathbf{v}$ bei veränderlichem $\mathbf{r}$ möglichst einfacher Art ist und dass es in diesem Sinne dem durch Gl. (38) ausgedrückten entspricht.

Um die Bedeutung dieser Bemerkung klar zu stellen, erinnere ich daran, dass jede stetige Funktion von x für ein hinreichend kleines Intervall von x durch Gl. (38) dargestellt werden kann. Lässt man diese Gleichung nachher für alle Werthe von x gelten, so stellt sie die Gleichung der Tangente an die Curve dar, durch die die ursprüngliche Funktion abgebildet wird. Der Coefficient a in Gl. (38) gibt das Aenderungsgesetz von y bei wachsendem x an der betrachteten Stelle bis auf unendlich kleine Grössen höherer Ordnung an.

In demselben Sinne kann man auch das Verlangen aussprechen, für eine beliebige stetige Vectorfunktion $\mathbf{v} = f(\mathbf{r})$ das Aenderungsgesetz an einer bestimmten Stelle $\mathbf{r}$ für einen unendlich kleinen Bezirk durch einen möglichst einfachen Ansatz wiederzugeben, der nur bis auf unendlich kleine Grössen höherer Ordnung genau zu sein braucht. Lässt man nachträglich diesen Ansatz für beliebige Werthe von $\mathbf{r}$ gelten, so

erhält man eine Funktion, die die gegebene Funktion $\mathbf{v} = f(\mathbf{r})$ an jener Stelle berührt und zwar entspricht das auf diese Weise gefundene berührende Feld genau der Tangente an eine Curve im Falle der Funktionen einer scalaren Grösse. Ein solches Feld heisst ein lineares Feld, die zugehörige Funktion eine lineare Vectorfunktion. Ueberhaupt sagen wir von irgend zwei Vectorfunktionen aus, dass sie sich an einer Stelle $\mathbf{r}$ berühren, wenn sie in der Nachbarschaft dieser Stelle bis auf unendlich kleine Grössen zweiter Ordnung mit einander übereinstimmen. Es ist nicht nöthig, weiter auszuführen, dass zwei Vectorfunktionen auch eine Berührung zweiter Ordnung u. s. f. mit einander eingehen können und dass sich die Berührung nicht auf einzelne Punkte zu beschränken braucht. Zwei Vectorfunktionen können sich vielmehr auch längs gewisser Linien oder Flächen berühren. Die Geometrie der Felder gestaltet sich dadurch viel mannichfaltiger als die gewöhnliche Geometrie des dreifach ausgedehnten Raumes und erinnert in mancher Hinsicht an die mehrdimensionale Geometrie, während ihr doch im Gegensatze zu dieser eine durchaus reale Bedeutung zukommt.

Die linearen Vectorfunktionen kommen übrigens für unsere Zwecke in erster Reihe nur insofern in Betracht, als sie eine gegebene Funktion höherer Ordnung berühren. Denn man sieht ohne Weiteres ein, dass sich ein lineares Feld immer ins Unendliche erstreckt, ein Fall, der für uns ohne Interesse ist. Desshalb habe ich auch die Definition der linearen Funktion als der das einfachste Aenderungsgesetz befolgenden berührenden Funktion zu irgend einer anderen gewählt. In zweiter Reihe kommen die linearen Vectorfunktionen freilich auch bei den Hypervectorfeldern vor und ihre Behandlung darf auch schon aus diesem Grunde hier nicht unterlassen werden.

Es bleibt nun noch übrig, eine Entscheidung darüber zu treffen, welches Aenderungsgesetz als das einfachste anzusehen ist, wobei immer daran festzuhalten ist, dass es hinreichend allgemein gehalten sein muss, um eine Berührung an jede beliebig gegebene stetige Funktion an irgend einer Stelle zu

gestatten. Man kann nicht im Zweifel sein, welcher Ansatz zu wählen ist: in derselben Richtung muss die Aenderung proportional dem Wege sein, den wir zurücklegten und für eine dritte Fortschreitungsrichtung muss sich die Aenderung durch geometrische Summirung aus den Aenderungen für zwei damit in derselben Ebene liegende Fortschreitungsrichtungen ergeben. In Form einer Gleichung heisst dies, dass

$$f(\mathbf{r} + \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) - f(\mathbf{r}) = (f(\mathbf{r} + \mathbf{r}_1) - f(\mathbf{r})) + (f(\mathbf{r} + \mathbf{r}_2) - f(\mathbf{r}))$$

oder kürzer, dass

$$f(\mathbf{r} + \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) = f(\mathbf{r} + \mathbf{r}_1) + f(\mathbf{r} + \mathbf{r}_2) - f(\mathbf{r}) . \quad (39)$$

sein muss. Darin bedeuten $\mathbf{r}_1$ und $\mathbf{r}_2$ ganz beliebig zu wählende Zuwüchse der Veränderlichen $\mathbf{r}$. Man kann auch Gl. (39) selbst als Definitionsgleichung der linearen Funktion $f(\mathbf{r})$ ansehen. Dies hat dann freilich den Nachtheil, dass man den Sinn dieses Ansatzes und den Grund, wesshalb er gerade in dieser Form gewählt wird, nicht sofort überblickt. Jedenfalls muss Gl. (39) zum Ausgangspunkt für die Ableitung aller übrigen Eigenschaften der linearen Funktionen gewählt werden.

Wählt man $\mathbf{r}_1$ und $\mathbf{r}_2$ unendlich klein und bezeichnet man z. B. die Aenderung, die $f(\mathbf{r})$ beim Weitergehen um $\mathbf{r}_1$ erfährt, mit $d_1 f(\mathbf{r})$, so folgt aus Gl. (39) auch

$$d_{1+2} f(\mathbf{r}) = d_1 f(\mathbf{r}) + d_2 f(\mathbf{r}) . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

Diese Gleichung ist aber auch bei jeder beliebigen stetigen Funktion bis auf unendlich kleine Grössen zweiter Ordnung erfüllt. Denn wir können die Aenderung, die $f(\mathbf{r})$ beim Fortschreiten um $\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2$ erfährt, immer dadurch berechnen, dass wir die Aenderung, die zu $\mathbf{r}_1$ gehört, um jene vermehren, die beim Fortschreiten vom Endpunkte von $\mathbf{r}_1$ zum Endpunkte der Strecke $\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2$ entsteht. An Stelle dieser letzten Aenderung ist in Gl. (40) $d_2 f(\mathbf{r})$ gesetzt, also die Aenderung, die sich auf die vom Anfangspunkte zu jener gleich und parallel gezogene Strecke $\mathbf{r}_2$ bezieht. Zum Begriff der Stetigkeit gehört aber, dass eine unendlich kleine Verrückung $\mathbf{r}_1$ der Strecke $\mathbf{r}_2$ die zu $\mathbf{r}_2$ gehörige Aenderung nur unendlich wenig im Ver-

gleiche zum Anfangsbetrage verändern darf. Mit anderen Worten: wo wir auch innerhalb eines unendlich kleinen Bezirks den Anfangspunkt einer nach Grösse und Richtung gegebenen unendlich kleinen Strecke $\mathbf{r}_2$ wählen mögen, die zu $\mathbf{r}_2$ gehörige Aenderung $d_2 f(\mathbf{r})$ muss bei stetigen Funktionen bis auf unendlich kleine Unterschiede zweiter Ordnung dieselbe sein. Wenn es einer besonderen Definition der Stetigkeit einer Funktion bedürfte, wäre sie in dieser Aussage enthalten.

Damit ist bewiesen, dass der Ansatz Gl. (39) in der That allgemein genug ist, um stets eine lineare Funktion angeben zu können, die diesen Ansatz befriedigt und die zugleich irgend eine gegebene Vectorfunktion in einem vorgeschriebenen Punkte berührt. Der Unterschied der linearen Funktionen von allen übrigen stetigen Funktionen besteht nur darin, dass für die linearen Funktionen Gl. (40) auch bei endlichen Werthen, für beliebige Funktionen dagegen nur bei unendlich kleinen Werthen von $\mathbf{r}_1$ und $\mathbf{r}_2$ erfüllt ist.

§ 11. Darstellung in Coordinaten.

Sind die Zuwüchse $\mathbf{r}_1$ und $\mathbf{r}_2$ von $\mathbf{r}$ gleich gerichtet, so sagt Gl. (40), wie es schon vorher verlangt war, aus, dass bei gegebener Zuwachsrichtung der unabhängigen Veränderlichen $\mathbf{r}$ der Zuwachs der Funktion proportional dem Absolutbetrage des Zuwachses von $\mathbf{r}$ ist.

Aus den Gleichungen (39) und (40) ist ferner zu schliessen, dass eine lineare Funktion vollständig gegeben ist, sobald man ihren Werth in einem beliebigen Anfangspunkte und die Zuwachsbeträge für irgend drei nicht in einer Ebene enthaltene Richtungen kennt. Denn man kann zu jedem anderen Punkt des Feldes gelangen, indem man nacheinander um entsprechende Wege in den drei bezeichneten Richtungen weiter rückt. Durch Anwendung von Gl. (39) (die übrigens in ähnlicher Form auch für drei Zuwüchse $\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3$ gültig sein muss, wie man leicht beweisen kann) erhält man daher den Werth der Funktion für jedes beliebige $\mathbf{r}$, sobald die angeführten Bestimmungsstücke gegeben sind.

Dieser Umstand weist uns von selbst auf die Benutzung eines Coordinatensystems hin und wir wählen dazu ein rechtwinkliges. Der Werth der linearen Funktion $\mathfrak{v}$ im Ursprunge sei $\mathfrak{v}_0$ und die auf die Längeneinheit bezogenen Zuwüchse in den Richtungen der drei Axen der xyz seien $\mathfrak{c}_1 \mathfrak{c}_2 \mathfrak{c}_3$. Dann wird die lineare Funktion durch die Gleichung

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0 + \mathfrak{c}_1 x + \mathfrak{c}_2 y + \mathfrak{c}_3 z \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

dargestellt und wir haben damit die gesuchte Verallgemeinerung der Gl. (38) gefunden. Im Ganzen erfordert also die vollständige Beschreibung eines linearen Feldes die Angabe von vier gerichteten Grössen oder mit anderen Worten 12 Zahlenangaben.

Von zwei gegebenen Feldern $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$ sage ich, dass sie sich an einer bestimmten Stelle schneiden, wenn an dieser Stelle $\mathfrak{v}_1 = \mathfrak{v}_2$ ist. Zwei lineare Felder können sich nicht berühren, denn wenn sie in einem unendlich kleinen Bezirke bis auf unendlich kleine Grössen höherer Ordnung mit einander übereinstimmen, trifft dies überall zu, d. h. die beiden Felder fallen zusammen. Schreibt man Gl. (41) für zwei lineare Felder an und beachtet man, dass jede dieser beiden Gleichungen in drei Componentengleichungen zerlegt werden kann, so erkennt man, dass sich zwei lineare Felder im Allgemeinen in einem Punkt schneiden. Bei besonderer Wahl der Bestimmungsstücke können sie sich aber auch in einer Geraden oder in einer Ebene schneiden. Rückt der Schnittpunkt oder die Schnittgrade oder die Schnittebene in unendliche Ferne, so sollen die Felder parallel genannt werden; wenn man zwischen diesen drei Fällen näher unterscheiden will, kann man sagen, dass sie parallel erster, zweiter oder dritter Ordnung sind.

Ich führe diese Sätze namentlich desshalb an, um die Bezeichnung dieser Felder als lineare besser zu rechtfertigen. Welcher Gebrauch von dem Feldbegriff für rein geometrische Untersuchungen gemacht werden kann, liegt ohnehin auf der Hand. Mit solchen Fragen befasse ich mich aber hier nicht.

Für die weitere Untersuchung der Eigenschaften der linearen

Felder können wir das constante Glied $\mathbf{v}_0$ in Gl. (41) unterdrücken. Die so entstehende Gleichung

$$\mathbf{v} = \mathbf{c}_1 x + \mathbf{c}_2 y + \mathbf{c}_3 z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

stellt, wenn man sich den gerichteten Coefficienten $\mathbf{c}$ alle möglichen Werthe beigelegt denkt, einen Büschel linearer Felder dar, die sich sämmtlich im Coordinatenursprung schneiden. Jedem anderen Felde, das nicht zu diesem Büschel gehört, entspricht ein Feld des Büschels, das ihm in dem vorher erwähnten Sinne parallel von der dritten Ordnung ist und das sich nur um die constante Grösse $\mathbf{v}_0$ von ihm unterscheidet. In allen Eigenschaften, die weiterhin in Betracht kommen, stimmen beide Felder vollständig überein und wir können uns daher auf die Untersuchung der Felder des Büschels beschränken. Wenn man will, kann man den Kreis der wesentlich von einander verschiedenen Felder noch etwas enger ziehen, indem man alle Felder, die sich nur durch den Massstab von einander unterscheiden oder die sich zur Deckung mit einander bringen lassen, als gleich ansieht. Ich will aber hier davon absehen, auf diese Beziehungen näher einzugehen.

Da in Gl. (42) schon auf ein Coordinatensystem Bezug genommen ist, empfiehlt es sich, die in ihr vorkommenden gerichteten Grössen noch weiter in Componenten nach den Coordinatenrichtungen zu zerlegen. Die Gleichung zerfällt dadurch in drei Componentengleichungen, nämlich mit der Bezeichnung c_{11} für die X-Componente von $\mathbf{c}_1$ u. s. f. in

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= c_{11}x + c_{21}y + c_{31}z \\ v_2 &= c_{12}x + c_{22}y + c_{32}z \\ v_3 &= c_{13}x + c_{23}y + c_{33}z \end{aligned} \right\} . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

Daneben ist jedoch noch eine abkürzende Bezeichnung erwünscht, damit man nicht genöthigt ist, jedesmal den ganzen Gleichungssatz (43) anzuschreiben, wenn man eine lineare Vectorfunktion darstellen will. Gleichbedeutend mit den Gl. (43) soll daher die Bezeichnung

$$\mathbf{v} = C(\mathbf{r}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

gebraucht werden. Wir nennen C den linearen Operator, durch den $\mathfrak{v}$ aus $\mathfrak{r}$ abgeleitet wird. Man hat nur zu beachten, dass sich der Operator C immer aus neun Componenten zusammensetzt, die sich mit den Componenten von $\mathfrak{r}$ nach der Vorschrift der Gleichungen (43) verbinden. Die allgemeinste lineare Vectorfunktion kann mit Benutzung des Operationszeichens C stets in der Form

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0 + C(\mathfrak{r}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

dargestellt werden.

§ 12. Lineare Funktion eines Einheitsvectors.

Man denke sich vom Centrum des durch Gl. (42) dargestellten Feldebüschels als Mittelpunkt eine Kugelfläche gezogen, deren Radius gleich der Längeneinheit ist, die mit e bezeichnet werden möge. Jedes Feld ist im ganzen Raume bekannt, wenn die Feldwerthe auf der Kugeloberfläche gegeben sind. Denn in anderen Abständen vom Ursprung ist die Feldgrösse ebenso gerichtet wie in jenem Punkt der Kugeloberfläche, der auf dem gleichen vom Ursprung gezogenen Fahrstrahl liegt und die absoluten Werthe verhalten sich wie die Abstände vom Ursprunge.

Wir wollen uns von jedem Punkte der Einheitskugel aus eine Strecke gezogen denken, die nach Grösse, Richtung und Sinn unter Zugrundelegung eines beliebig gewählten Massstabes die Feldgrösse an dieser Stelle abbildet. Man sieht leicht ein, dass die Endpunkte dieser Strecken auf einem centriscb liegenden Ellipsoid enthalten sind. Seien nämlich $\xi \eta \zeta$ die Coordinaten des Endpunktes einer dieser Strecken, so hat man

$$\left. \begin{aligned} \xi &= x + c_{11}x + c_{21}y + c_{31}z \\ \eta &= y + c_{12}x + c_{22}y + c_{32}z \\ \zeta &= z + c_{13}x + c_{23}y + c_{33}z \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

und daneben besteht die Kugelgleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = e^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

Löst man die Gleichungen (46) nach $x y z$ auf und setzt die gefundenen Werthe in (47) ein, so erhält man eine Gleichung zweiten Grades für $\xi \eta \zeta$. Die zugehörige Fläche muss ein Ellipsoid sein, da ihre Punkte alle im Endlichen liegen und der Mittelpunkt des Ellipsoids muss mit dem Ursprung zusammenfallen, da die Gleichung immer noch erfüllt ist, wenn man die Vorzeichen von $\xi \eta \zeta$ gleichzeitig umkehrt.

Man erkennt daraus, dass jedes lineare Feld im Allgemeinen drei zu einander senkrechte Hauptrichtungen hat, die sich durch ihre Symmetrieeigenschaften auszeichnen. Ein Ausnahmefall liegt vor, wenn die Determinante der Coefficienten der Gleichungen (46) verschwindet. In diesem Falle schneidet das vorgelegte Feld das Feld $\mathfrak{u} = 0$ in einer Geraden oder in einer Ebene.

Bei passender Wahl des Massstabes, nöthigenfalls unter Zuhülfenahme einer Richtungsumkehrung des ganzen Feldes kann man es immer dahin bringen, dass das Ellipsoid der vorausgehenden Darstellung in eine Ellipsenfläche übergeht, so also, dass die eine Hauptaxe des Ellipsoids zu Null wird. Mit Hülfe dieses Kunstgriffs hat Hr. Mohr eine sehr elegante Darstellung des Spannungszustandes in einem Körper gegeben. Ich gebe hier die Quelle*) an, da die Arbeit in dem Leserkreise, für den diese Schrift bestimmt ist, schwerlich allgemeiner bekannt wurde, während ich sonst aus denselben Gründen wie in meinem Buche über die Maxwell'sche Elektrizitätslehre von Citaten grundsätzlich absehe.

Ueberhaupt liegt übrigens das Interesse an den Funktionen eines Einheitsvectors vorwiegend auf dem Gebiete der Hypervectorfelder, so dass es nicht nöthig ist, hier ausführlicher darauf einzugehen.

§ 13. Quellen und Wirbel der linearen Vectorfunktion.

Das lineare Feld bildet den einfachsten Fall eines Vectorfeldes, wenn man von den Specialfällen absieht, die in dem

*) Mohr, Civil-Ingenieur, 1882, S. 126

Begriffe des linearen Feldes schon mit enthalten sind. Es ist daher von Wichtigkeit, die Vertheilung der Quellen und der Wirbel in ihm festzustellen, um so mehr als damit zugleich auch gefunden wird, von welcher Art diese Vertheilung in einem unendlich kleinen Bezirk eines beliebigen Feldes sein kann. Nach den Gleichungen (5) und (43) erhalten wir für das lineare Feld

$$q = \operatorname{div} \mathbf{v} = c_{11} + c_{22} + c_{33}, \quad \dots \quad (48)$$

also eine gleichmässige Vertheilung der Quellen über das ganze Feld. Auch die Wirbel sind gleichmässig über das ganze Feld vertheilt, denn aus Gl. (35) folgt

$$\mathbf{w} = \mathbf{i}(c_{23} - c_{32}) + \mathbf{j}(c_{31} - c_{13}) + \mathbf{k}(c_{12} - c_{21}) \quad (49)$$

Die Quellenintensität ist demnach nur von den Componenten von C mit gleichen, die Wirbelintensität von den Componenten mit ungleichen Zeigern abhängig. Zugleich erkennen wir, welche Bedingungen erfüllt sein müssen, damit eine lineare Vectorfunktion entweder quellenfrei oder wirbelfrei ist. Sie kann überdies auch zugleich quellenfrei und wirbelfrei im ganzen Raume sein, denn das ihr zugeordnete Feld erstreckt sich ins Unendliche; es wird sogar im Unendlichen selbst unendlich gross. Der in § 7 bewiesene Satz, dass ein Feld nicht zugleich quellenfrei und wirbelfrei im ganzen Raume sein kann, gilt nur unter der dort ausgesprochenen Voraussetzung, dass sich das Feld nicht ins Unendliche erstreckt.

Die geometrische Summe aus zwei linearen Vectorfunktionen ist nach den Gleichungen (43) wieder eine lineare Funktion. Umgekehrt kann jede lineare Funktion in zwei Bestandtheile zerlegt werden, von denen der eine quellenfrei und der andere wirbelfrei ist. Eine solche Zerlegung ist mit Rücksicht auf die Anwendungen der Theorie vom grössten Interesse. Wir werden später sehen, dass sie bei Feldern, die sich nicht ins Unendliche erstrecken, immer in eindeutiger Weise möglich ist. Hier kann dagegen die Zerlegung auf unendlich verschiedene Arten vorgenommen werden. Eine davon ist aber von besonderer Bedeutung.

Man bilde nämlich zu der gegebenen Funktion eine zweite, indem man in den Gleichungen (43) alle Zeiger mit einander vertauscht, so dass also z. B. bei der neuen Funktion an die Stelle von c_{21} jener Werth tritt, der bei der früheren mit c_{12} bezeichnet war. Die so gefundene Funktion wird die zur ersten conjugirte genannt. Von selbst ist dann auch die erste conjugirt zur zweiten, das Verhältniss ist also ein wechselseitiges. War von vornherein $c_{12} = c_{21}$ u. s. f., so heisst die Funktion selbstconjugirt. Eine solche ist nach Gl. (49) immer wirbelfrei. Den Operator der zu $\mathbf{v} = C(\mathbf{r})$ conjugirten Funktion wollen wir mit C_k bezeichnen, so dass also $\mathbf{v}_k = C_k(\mathbf{r})$ die conjugirte Funktion bezeichnet.

Die geometrische Summe $C(\mathbf{r}) + C_k(\mathbf{r})$ ist nach der Definition immer eine selbstconjugirte Funktion und daher wirbelfrei. Die Quellenintensität ist bei ihr doppelt so gross als bei $C(\mathbf{r})$ oder bei $C_k(\mathbf{r})$, da nach Gl. (48) allgemein

$$\operatorname{div} C(\mathbf{r}) = \operatorname{div} C_k(\mathbf{r}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50)$$

ist. Die geometrische Differenz $C(\mathbf{r}) - C_k(\mathbf{r})$ ist dagegen quellenfrei und ihre Wirbelintensität beträgt das Doppelte der Wirbelintensität von $C(\mathbf{r})$, wie aus Gl. (49) sofort zu schliessen ist. Setzen wir daher

$$\mathbf{v} = C(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \{ (C(\mathbf{r}) + C_k(\mathbf{r})) + (C(\mathbf{r}) - C_k(\mathbf{r})) \} \quad . \quad . \quad (51),$$

so ist die Zerlegung von $\mathbf{v}$ in einen wirbelfreien und einen quellenfreien Bestandtheil sofort ausgeführt und zwar auf solche Art, dass beide Antheile einen besonders einfachen Aufbau besitzen.

§ 14. Andere Darstellung der linearen Vectorfunktion.

Die beiden Antheile, in die $\mathbf{v}$ durch Gl. (51) zerlegt ist, lassen sich auch derart ausdrücken, dass jede Bezugnahme auf ein Coordinatensystem dabei vermieden wird. Betrachten wir zunächst den ersten Antheil $\frac{1}{2}(C(\mathbf{r}) + C_k(\mathbf{r}))$, von dem wir wissen, dass er eine selbstconjugirte und daher wirbelfreie Funktion bildet. Wir wissen, dass jedes wirbelfreie Feld von

einem Potentiale abgeleitet werden kann. Die Integrationsconstante kann hier freilich nicht so bestimmt werden, dass das Potential im Unendlichen verschwindet, weil sich das Feld ins Unendliche erstreckt und dort selbst unendlich wird. Wir wählen diese Constante, da es auf ihren Werth weiterhin nicht ankommt, am einfachsten so, dass das Potential im Anfangspunkte zu Null wird.

Bezeichnen wir den ersten Bestandtheil von $\mathfrak{v}$ mit $\mathfrak{v}_q$, so erhalten wir für das zugehörige Potential nach Gl. (13)

$$V = - \int_0^r \mathfrak{v}_q d\mathfrak{s}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (52)$$

Wir können uns den Integrationsweg von 0 bis $\mathfrak{r}$ gradlinig gewählt denken. Die Integration kann dann sofort ausgeführt werden, da $\mathfrak{v}_q$ längs des Integrationswegs gleichmässig von 0 bis zum Endwerthe, der auch wieder mit $\mathfrak{v}_q$ bezeichnet werden soll, anwächst und seine Richtung beibehält. Man braucht daher nur den Mittelwerth $\frac{1}{2}\mathfrak{v}_q$ mit dem ganzen Integrationswege $\mathfrak{r}$ zu multipliciren und erhält

$$V = - \frac{1}{2}\mathfrak{v}_q \mathfrak{r}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (53)$$

Gehen wir dann wieder vom Potentiale zum Felde $\mathfrak{v}_q$ über, so hat man auch

$$\mathfrak{v}_q = \frac{1}{2}\nabla \mathfrak{v}_q \mathfrak{r}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (54)$$

Auch nachträglich kann man sich leicht durch die Ausführung der hier angedeuteten Rechenoperationen nach den früher dafür festgestellten Regeln von der Richtigkeit dieses Ansatzes überzeugen.

Wir gehen jetzt zum zweiten Antheile von $\mathfrak{v}$ über, der mit $\mathfrak{v}_w$ bezeichnet werden soll, also

$$\mathfrak{v}_w = \frac{1}{2}(C(\mathfrak{r}) - C_k(\mathfrak{r})).$$

Eine Funktion von diesem Aufbau hat die Eigenthümlichkeit, dass die Componenten ihres Operators das Vorzeichen wechseln, wenn man in c_{12} u. s. f. die beiden Zeiger mit einander vertauscht, während die zu gleichen Zeigern gehörigen Componenten Null sind. Die Conjugirte von $\mathfrak{v}_w$ ist

das Negative von $\mathfrak{v}_w$. Man hat nämlich, wenn man die Componenten von $\mathfrak{v}_w$ anschreibt, wie sie sich nach den Gl. (43) ergeben

$$\left. \begin{aligned} v_{w,1} &= \frac{c_{21} - c_{12}}{2} y + \frac{c_{31} - c_{13}}{2} z \\ v_{w,2} &= \frac{c_{12} - c_{21}}{2} x + \frac{c_{32} - c_{23}}{2} z \\ v_{w,3} &= \frac{c_{13} - c_{31}}{2} x + \frac{c_{23} - c_{32}}{2} y \end{aligned} \right\} \cdot \cdot \cdot \quad (55)$$

Vergleicht man die Operatorcomponenten in diesem Gleichungssatze mit Gl. (49), so erkennt man, dass sie dem Absolutbetrage nach halb so gross sind als die Wirbelcomponenten in Gl. (49), während das Vorzeichen abwechselnd gleich und entgegengesetzt ist. Wenn die Componenten von $\mathfrak{w}$ wie gewöhnlich mit $w_1 w_2 w_3$ bezeichnet werden, kann man daher die Gleichungen (55) durch die folgende Vektorgleichung ersetzen

$$2\mathfrak{v}_w = \mathfrak{i}(w_2 z - w_3 y) + \mathfrak{j}(w_3 x - w_1 z) + \mathfrak{k}(w_1 y - w_2 x). \quad (56)$$

In dieser Bildung erkennt man das statische Moment von $\mathfrak{w}$ in Bezug auf den Anfangspunkt; die Klammerwerthe stellen die statischen Momente von $\mathfrak{w}$ in Bezug auf die drei Coordinatenachsen dar. Ein statisches Moment in Bezug auf einen Punkt kann aber in einfachster Art durch das Vectorprodukt oder nach der Bezeichnung von Grassmann als das äussere Produkt aus dem Vector, von dem es genommen werden soll und dem Hebelarm angeschrieben werden. Wir ersetzen daher Gl. (56) durch die Schreibweise

$$\mathfrak{v}_w = \frac{1}{2} V \mathfrak{w} \mathfrak{r}. \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (57)$$

Für den Leser, der mit dem Vectorcalcul noch nicht vertraut ist, bildet diese Gleichung nur eine leichtverständliche Abkürzung für die in der Mechanik so häufig vorkommende Componentenverbindung in Gl. (56) und das Zeichen V erhält für ihn hierdurch seine Definition.

Ein statisches Moment in Bezug auf einen Punkt ist stets eine gerichtete Grösse, die zum Hebelarme senkrecht steht;

daher steht auch $\mathbf{v}_w$ senkrecht zu $\mathbf{r}$. Wir können deswegen mit den Gleichungen (53) und (54) noch eine Veränderung vornehmen, durch die sie sehr vereinfacht werden. Anstatt nur den Antheil $\mathbf{v}_q$ von $\mathbf{v}$ auf $\mathbf{r}$ zu projeciren, wie es dort vorgeschrieben war, können wir nämlich auch das ganze $\mathbf{v}$ projeciren, da der andere Antheil $\mathbf{v}_w$, wie wir eben sahen, senkrecht zu $\mathbf{r}$ steht und daher zur Projektion nichts beiträgt. Diese Gleichungen gehen dadurch über in

$$V = -\frac{1}{2}\mathbf{v}\mathbf{r} \quad \text{und} \quad \mathbf{v}_q = \frac{1}{2}\nabla\mathbf{v}\mathbf{r}. \quad (58)'$$

Eine lineare Vectorfunktion, die das Feld $\mathbf{v} = 0$ im Anfangspunkte schneidet, kann daher immer dargestellt werden in der Form

$$\mathbf{v} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{v}\mathbf{r} + V\mathbf{w}\mathbf{r}). \quad (59)$$

Um diese Darstellung auf den allgemeinen Fall zu übertragen, dass noch ein constantes Glied $\mathbf{v}_0$ hinzutritt, beachte man, dass der Wirbel $\mathbf{w}$ davon gar nicht berührt wird, wohl aber das Potential V und hiermit auch das erste Glied in der Klammer von Gl. (59). Man findet leicht, dass

$$\nabla\mathbf{v}_0\mathbf{r} = \mathbf{v}_0 \quad (60)$$

ist, und wenn man dies beachtet, erhält man für eine beliebige lineare Vectorfunktion die bemerkenswerthe Entwicklung

$$\mathbf{v} = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_0 + \nabla\mathbf{v}\mathbf{r} + V\mathbf{w}\mathbf{r}). \quad (61)$$

Das erste Glied ist constant, das zweite rührt von einem Potentiale her, ist also wirbelfrei und das dritte ist quellenfrei.

§ 15. Die Umkehrung der linearen Funktionen.

Wenn $\mathbf{v} = C(\mathbf{r})$ ist, kann auch umgekehrt $\mathbf{r}$ als eine lineare Funktion von $\mathbf{v}$ aufgefasst werden. Im Allgemeinen lässt sich nämlich diese Gleichung nach $\mathbf{r}$ auflösen und man erhält damit eine Gleichung von der Form

$$\mathbf{r} = K(\mathbf{v}). \quad (62)$$

Die neun Componenten des linearen Operators K kann man nach Einsicht in die Gleichungen (43), die den Operator

C definirten, sofort anschreiben. Setzt man zur Abkürzung die Determinante der neun Componenten von C in den Gleichungen (43)

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{vmatrix} = \Delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (63)$$

so erhält man für die Componenten $x y z$ von $\mathbf{r}$ durch Auflösen jener Gleichungen

$$x = \begin{vmatrix} v_1 & c_{21} & c_{31} \\ v_2 & c_{22} & c_{32} \\ v_3 & c_{23} & c_{33} \end{vmatrix} : \Delta; \quad y = \begin{vmatrix} c_{11} & v_1 & c_{31} \\ c_{12} & v_2 & c_{32} \\ c_{13} & v_3 & c_{33} \end{vmatrix} : \Delta \text{ u. s. f. } (64)$$

Demnach ist z. B.

$$k_{11} = (c_{22}c_{33} - c_{23}c_{32}) : \Delta \quad \text{und} \quad k_{21} = (c_{31}c_{23} - c_{21}c_{33}) : \Delta \quad . \quad . \quad (65)$$

d. h. von dem constanten Divisor Δ abgesehen, ist jede Componente von K gleich der Unterdeterminante, die in Δ zur entgegengesetzt bezeichneten Componente von C gehört.

Die weitere Erörterung dieser Verhältnisse ist in mancher Hinsicht von Interesse; namentlich für die Untersuchung der Drehungen, die ein starrer Körper um einen Punkt ausführen kann, lässt sich Gewinn daraus ziehen. Hier will ich nur noch darauf aufmerksam machen, dass die Funktion $\mathbf{v} = C(\mathbf{r})$ keine Umkehrung zulässt, wenn die Determinante Δ verschwindet. Das Feld $\mathbf{v}$ schneidet dann das Feld $\mathbf{v} = 0$ in einer durch den Ursprung gehenden Graden (ausnahmsweise auch in einer Ebene) und grade dieser Fall ist von Bedeutung für die Theorie der Drehungen. Die Schnittlinie entspricht dann der Axe, um die die Drehung stattfand.

Auch über die Verbindung mehrerer linearer Operatoren miteinander, also z. B. über lineare Funktionen von der Form

$$\mathbf{v} = A(B(\mathbf{r})) = C(\mathbf{r}),$$

wobei nun C aus der Aufeinanderfolge der linearen Operationen A und B abzuleiten ist, lassen sich manche interessante Sätze aufstellen. Einerseits habe ich mich aber mit solchen Fragen zu wenig beschäftigt und andererseits sind sie auch

nicht von hinreichender Bedeutung für den Zweck, den ich in dieser Schrift verfolge, als dass ich näher darauf eingehen könnte.

§ 16. Der Satz von Stokes für das lineare Feld.

In einem linearen Felde sei eine beliebige in sich zurückkehrende Curve gezogen. Wir ermitteln für diesen Integrationsweg den Werth des Linienintegrals $\int \mathbf{v} d\mathbf{s}$, das in der Geometrie der Felder eine so wichtige Rolle spielt. Zur Berechnung des Integrals stützen wir uns auf die Darstellung, die in Gl. (61) von einer beliebigen Vectorfunktion gegeben wurde. Das Linienintegral wird dadurch in drei Theile zerlegt und wir erhalten

$$\int_A^A \mathbf{v} d\mathbf{s} = \frac{1}{2} \int_A^A \mathbf{v}_0 d\mathbf{s} + \frac{1}{2} \int_A^A d\mathbf{s} \nabla \mathbf{v} \mathbf{r} + \frac{1}{2} \int_A^A d\mathbf{s} V \mathbf{w} \mathbf{r}. \quad (66)$$

Das erste Glied auf der rechten Seite verschwindet aber, da der Faktor $\mathbf{v}_0$ constant ist und die geometrische Summe aller $d\mathbf{s}$ für die geschlossene Curve zu Null wird. Auch das zweite Glied verschwindet, denn nach Gl. (17) gibt $d\mathbf{s} \nabla \mathbf{v} \mathbf{r}$ die Aenderung an, die $\mathbf{v} \mathbf{r}$ bei einer Verschiebung um $d\mathbf{s}$ erfährt und die Summe dieser Aenderungen wird zu Null, wenn wir wieder zum Ausgangspunkt zurückkehren, da $\mathbf{v} \mathbf{r}$ nothwendig eine eindeutige Grösse ist. Wir behalten also nur das dritte Glied übrig und dieses lässt sich leicht noch ein wenig umformen. Allgemein ist nämlich $\mathfrak{A} V \mathfrak{B} \mathfrak{C} = \mathfrak{B} V \mathfrak{C} \mathfrak{A}$; man braucht, um sich davon zu überzeugen, die Operationen nur in Coordinaten auszuführen, indem man z. B. die Componenten von $V \mathfrak{B} \mathfrak{C}$ durch Vergleich von Gl. (57) mit Gl. (56) anschreibt, die i -Componente mit A_1 , die j -Componente mit A_2 u. s. f. multiplicirt. Ich erwähne noch, dass der Satz über die Vertauschbarkeit der Faktoren in einem Produkt dieser Art, zu dessen Beweis man auf diesem Wege gelangt, zu den wichtigsten des Vectorcalculus gehört; für Leser meines Buches über die Maxwell'sche Elektrizitätslehre sind alle Hinweise dieser Art entbehrlich. — Da ferner der Wirbel $\mathbf{w}$ im linearen Felde

nach § 13 eine constante Grösse ist, können wir $\mathfrak{w}$ vor das Integralzeichen setzen und erhalten schliesslich an Stelle von Gl. (66)

$$\int_A^A \mathfrak{v} d\mathfrak{s} = \frac{1}{2} \mathfrak{w} \int_A^A V \mathfrak{r} d\mathfrak{s} (67)$$

Der nun noch auf der rechten Seite stehende Ausdruck hat aber eine einfache geometrische Bedeutung: $\frac{1}{2} V \mathfrak{r} d\mathfrak{s}$ ist nämlich eine gerichtete Grösse, deren Absolutwerth gleich der Fläche eines Dreiecks ist, dessen Spitze im Anfangspunkte liegt, während die Gegenseite das Linienelement $d\mathfrak{s}$ des Integrationswegs ist. Die Richtung endlich steht senkrecht zu dieser Dreiecksfläche.

Denkt man sich auch $\mathfrak{w}$ hydrodynamisch construirt, so also, dass es eine — und zwar hier eine constante — Geschwindigkeit einer zweiten Abbildungsflüssigkeit angibt, so ist das scalare Produkt $\frac{1}{2} \mathfrak{w} V \mathfrak{r} d\mathfrak{s}$ die Flüssigkeitsmenge, die in diesem Bilde in der Zeiteinheit durch das vorher beschriebene Dreieck strömt, denn die Strömung durch einen Querschnitt wird stets gefunden, wenn man die Querschnittsfläche mit der senkrecht zu ihr stehenden Geschwindigkeitscomponente multiplicirt.

Das Vorzeichen des Ausdrucks hängt davon ab, wie die Umlaufrichtung von $d\mathfrak{s}$ gewählt wird; es wird positiv, wenn die Aufeinanderfolge $d\mathfrak{s}$, $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{r}$ ein Rechtssystem im Raume bildet.

Bei der Ausführung der Integration haben wir die Flüssigkeitsströmung durch alle Dreiecke zu nehmen, die den zum Integrationswege gehörenden Linienelementen $d\mathfrak{s}$ entsprechen. Das gibt aber im ganzen die Strömung durch den Kegelmantel, dessen Spitze der Anfangspunkt und dessen Basis der Integrationsweg ist.

Das Linienintegral von $\mathfrak{v}$ ist also gleich der Flüssigkeitsmenge, die bei der constanten Geschwindigkeit $\mathfrak{w}$ durch den bezeichneten Kegelmantel fliesst. An Stelle des Kegelmantels kann man übrigens auch die Kegelbasis oder irgend ein Flächenstück setzen, das zwischen der Integrationscurve als Rand zu-

sammenhängend ausgespannt ist. Man kann sehr viele Flächen dieser Art ziehen, zu denen auch der vorher betrachtete Kegelmantel selbst gehört. Durch jede von diesen Flächen muss aber im Felde $\mathfrak{w}$ dieselbe Flüssigkeitsmenge strömen. Betrachtet man nämlich irgend zwei von diesen Flächen, so grenzen sie zusammen ein Volumen ab, das keine Quellen enthält, da $\mathfrak{w}$ constant und daher $\text{div } \mathfrak{w} = 0$ ist. Nach der Bedingung der Unzusammendrückbarkeit muss daher durch die eine Fläche ebensoviel ausströmen als durch die andere eintritt. Es ist also nicht nöthig, dass wir uns bei der Aussprache des in Gl. (67) gefundenen Satzes grade auf den Kegelmantel beziehen, dessen Spitze im Anfangspunkte liegt: wir können jede beliebige zusammenhängende Fläche auswählen, deren Randcurve vom Integrationswege gebildet wird. Die im Felde $\mathfrak{w}$ durch diese Fläche gehende Flüssigkeitsmenge ist dann ebensov gross als das Linienintegral über den Rand im Felde $\mathfrak{v}$. Erinnern wir uns der schon in Gl. (6) gebrauchten Darstellung für den Fluss durch eine Fläche, so lässt sich Gl. (67) daher auch ersetzen durch

$$\int_A^A \mathfrak{v} d\mathfrak{s} = \int \mathfrak{w} \mathfrak{N} df = \int \text{curl } \mathfrak{v} \cdot \mathfrak{N} df. \quad . \quad . \quad (68)$$

In der letzten Form ist der Werth von $\mathfrak{w}$ aus Gl. (37) eingesetzt. — In dieser Form zeigt uns der Satz auch deutlich, wie zweckmässig die Wahl der Grösse $\mathfrak{w}$ oder $\text{curl } \mathfrak{v}$ als Mass des Wirbels ist. Während wir ursprünglich (in § 9) nur gefunden hatten, dass $\mathfrak{w}$ verschwinden muss, wenn die Strömung an jener Stelle innerhalb eines unendlich kleinen Bezirks keinen Antheil haben soll, der in einer in sich zurückkehrenden Bahn verläuft, sind wir jetzt in den Stand gesetzt, den Zusammenhang zwischen dem Felde $\mathfrak{w}$ und dem Werthe des Linienintegrals, das für die Definition der Wirbelbewegung ursprünglich massgebend war, genau anzugeben.

Schliesslich ist noch zu bemerken, dass die Richtung der Einheitsnormalen $\mathfrak{N}$ in Gl. (68), damit beide Seiten der Gleichung auch dem Vorzeichen nach übereinstimmen, so gewählt

werden muss, dass die Aufeinanderfolge $d\mathfrak{s}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{r}$ ein Rechtssystem im Raume bildet. Denn wir erkannten schon vorher, dass das Linienintegral $\int \mathfrak{u} d\mathfrak{s}$ positiv wird, wenn $d\mathfrak{s}$, $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{r}$ nach Art eines Rechtssystems aufeinanderfolgen und das Oberflächenintegral $\int \mathfrak{w} \mathfrak{N} df$ wird ebenfalls positiv, wenn man in dieser Aufeinanderfolge $\mathfrak{w}$ durch $\mathfrak{N}$ ersetzt.

§ 17. Uebertragung des Stokes'schen Satzes auf beliebige Felder.

Auf einen unendlich kleinen Bezirk jedes beliebigen stetigen Feldes kann Gl. (68) ohne Weiteres angewendet werden, indem man sich das Feld an dieser Stelle durch das es berührende lineare Feld ersetzt denkt. Aber auch für einen Integrationsweg von endlichen Abmessungen bleibt Gl. (68) in jedem beliebigen Felde unverändert gültig. Um dies zu erkennen, lege man durch den Integrationsweg eine beliebige Fläche, so dass der Integrationsweg die Randcurve des Flächenstücks bildet. Dann ziehe man auf der Fläche zwei Systeme von Linien, die die Fläche in unendlich kleine Abschnitte zerlegen, derart, dass jeder Abschnitt innerhalb eines unendlich kleinen Bezirks liegt. Man kann dann Gl. (68) für jeden Abschnitt anwenden und wir wollen, nachdem dies geschehen ist, alle hierbei nach dem Muster von Gl. (68) angeschriebenen Gleichungen addiren. Der Umlaufssinn von $d\mathfrak{s}$ muss dabei für die Umgrenzung aller Abschnitte gleich genommen werden; von selbst gehen dann auch die Normalen $\mathfrak{N}$ alle nach derselben Seite der Fläche.

Man erkennt nun sofort, dass die Summe der Linienintegrale $\int \mathfrak{u} d\mathfrak{s}$ für die Umgrenzungen aller Abschnitte ebensogross ist als das Linienintegral über die Randcurve des ganzen Flächenstücks, also über den ursprünglichen Integrationsweg. Denn die Grenzlinien zwischen benachbarten Abschnitten liefern je zwei Beiträge von gleichem Werthe und entgegengesetztem Vorzeichen, die sich gegenseitig aufheben; es bleiben also nur die von der Randcurve herstammenden Bei-

träge übrig, die von dieser gegenseitigen Tilgung allein unberührt bleiben.

Auf der andern Seite der Gleichung ist zur Summirung nur erforderlich, das Oberflächenintegral über die ganze Fläche zu erstrecken. Man erkennt hiermit, dass in der That auch für jedes beliebige Feld und jeden beliebigen Integrationsweg

$$\int_A^A \mathbf{v} d\mathbf{s} = \int \mathbf{w} \mathfrak{N} df = \int \text{curl } \mathbf{v} \cdot \mathfrak{N} df \quad \dots \quad (69)$$

gesetzt werden kann.

Schon aus dem Beweise geht hervor, dass es auch hier ganz gleichgültig ist, welche Fläche man zwischen dem als Randcurve dienenden Integrationswege ausspannt. Auch auf andre Art folgt dies leicht und wir werden dabei noch auf eine wichtige Eigenschaft des Feldes $\mathbf{w}$ aufmerksam.

Führt man nämlich an dem durch Gl. (35) definirten Werthe von $\mathbf{w}$ die durch Gl. (5) umschriebene Operation div aus, so erhält man

$$\text{div } \mathbf{w} = \text{div curl } \mathbf{v} = 0. \quad \dots \quad (70)$$

Das Feld $\mathbf{w}$, das aus einem beliebigen Felde $\mathbf{v}$ dadurch hervorgeht, dass man von ihm den Wirbel nimmt, ist also für sich betrachtet immer quellenfrei. In der That muss daher im Felde $\mathbf{w}$ durch jede zwischen der gleichen Randcurve ausgespannte Fläche dieselbe Flüssigkeitsmenge strömen.

Der durch Gl. (70) ausgesprochene Satz ist von grösster Bedeutung für die Elektrizitätslehre. Er sagt nicht weniger aus, als dass die elektrische Strömung nothwendig — und zwar aus rein geometrischen Gründen — in geschlossenen Bahnen verlaufen muss, vorausgesetzt, dass man den elektrischen Strom, wie es auch in der That eigentlich von jeher geschehen ist, durch seine magnetischen Wirkungen, nämlich genauer gesprochen als Wirbel des von ihm erzeugten magnetischen Feldes definirt.

Der durch Gl. (69) ausgedrückte Stokes'sche Satz ist dagegen das wichtigste Hilfsmittel zur weiteren Erforschung der Eigenschaften der Vectorfunktionen und der zugehörigen Felder;

er entspricht einem von Cauchy herrührenden bekannten Satze der gewöhnlichen Funktionentheorie. Dass dies so ist, erkennt man deutlich erst bei der Schreibweise des Vectorcalcüls, während der Zusammenhang leicht unbeachtet bleiben kann, wenn man den Stokes'schen Satz nur in der Coordinatendarstellung kennt.

Drittes Capitel.

Das quellenfreie Feld mit einem Wirbelfaden.

§ 18. Stellung der Aufgabe.

Im ersten Capitel beschränkten wir uns auf die Untersuchung von Feldern, in denen keine Wirbel vorkamen, während Quellen in beliebiger Vertheilung vorhanden sein durften. Jetzt, wo wir gerade die Wirbelfelder ausführlicher untersuchen wollen, können wir umgekehrt dadurch eine Vereinfachung herbeiführen, dass wir das Feld als quellenfrei voraussetzen. Wir werden später sehen, dass man jedes beliebige Feld als die Summe eines von Quellen herrührenden wirbelfreien und eines von Wirbeln herrührenden quellenfreien Feldes betrachten kann; in der That kommt es also nur darauf an, diese beiden Specialfälle ausführlicher zu erörtern.

In diesem Capitel werden wir daher nur solche Funktionen betrachten, die der Bedingungsgleichung

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (71)$$

im ganzen Raume genügen. Alle Stromlinien müssen dann in sich zurückkehrende Linien bilden. Das Linienintegral $\int \mathfrak{v} d\mathfrak{s}$ nimmt für jede Stromlinie einen von Null verschiedenen und zwar einen positiven Werth an, wenn wir $d\mathfrak{s}$ in der Richtung von $\mathfrak{v}$ zählen.

Um die Untersuchung mit den einfachsten Hilfsmitteln zu Ende führen zu können, müssen wir aber einstweilen noch eine weitere Voraussetzung einführen, die wir erst im nächsten Capitel wieder fallen lassen können. Wir wollen hier nämlich

annehmen, das Feld sei von so einfacher Art, dass $\oint \mathbf{v} d\mathbf{s}$ für jede geschlossene Linie immer noch verschwindet, solange dieser Integrationsweg nicht von einer ein für alle mal, sonst aber ganz beliebig gewählten Curve umkettet wird. Diese Curve bezeichnen wir aus einem Grunde, der sich sofort ergeben wird, als eine Wirbellinie.

Grenzen wir in diesem Felde ein einfach zusammenhängendes Gebiet ab, das von der angenommenen Wirbellinie nicht durchsetzt wird, so ist nach Voraussetzung $\oint \mathbf{v} d\mathbf{s}$ für jeden innerhalb dieses Gebietes verlaufenden geschlossenen Integrationsweg gleich Null; daher kann $\mathbf{v}$ in dem Gebiete von einem Potentiale abgeleitet werden, das bis auf eine willkürliche Constante vollständig bestimmt ist. Dadurch wird uns die Aussicht eröffnet, die Untersuchung mit den Hilfsmitteln des ersten Capitels, d. h. mit der gewöhnlichen Potentialtheorie, durchführen zu können. Zugleich folgt, dass $\mathbf{w} = \text{curl } \mathbf{v}$ überall innerhalb des Gebiets gleich Null ist. Die Flüssigkeit wirbelt also an allen ausserhalb der Wirbellinie liegenden Stellen überhaupt nicht, d. h. der Wirbel beschränkt sich nur auf die Linie selbst, womit die für die Linie gewählte Bezeichnung gerechtfertigt ist.

Für einen Integrationsweg, der die Wirbellinie einmal umkettet, sei $\oint \mathbf{v} d\mathbf{s} = W$. Wir werden bald sehen, dass W für alle solche Integrationswege nothwendig denselben Werth haben muss; ebenso wird sich zeigen, dass es in der That Funktionen von immer noch sehr mannichfaltiger Art gibt, die alle ihnen hier auferlegten Bedingungen erfüllen.

Durch den Integrationsweg als Randcurve legen wir eine Fläche, die im Falle einmaliger Verschlingung die Wirbellinie in einem Punkte trifft. Nach dem Stokes'schen Satze ist dann

$$W = \int \mathbf{w} \mathbf{N} df. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (72)$$

Ueberall ausserhalb der Wirbellinie war $\mathbf{w} = 0$. Damit $\mathbf{w}$ auf der Wirbellinie selbst nicht unendlich gross wird — ein Fall, der physikalisch genommen immer nur als Grenzfall von Bedeutung ist — müssen wir daher an die Stelle der Wirbel-

linie einen Wirbelfaden setzen, dessen Querschnitt unendlich klein angenommen wird, während ihm die Wirbellinie selbst als Axe dient. Freilich wird dann immer noch W und daher auch v unendlich klein, wenn wir nur endliche Werthe von w im Wirbelfaden zulassen. Dies gilt für v selbst dann noch, wenn wir den Integrationsweg so klein wählen, dass er unmittelbar an der Oberfläche des Fadens verläuft. Denn der Querschnitt des Wirbelfadens und mit ihm nach Gl. (72) auch der Werth von W ist bei endlichem w klein von der zweiten Ordnung, während der Querschnittsumfang nur von der ersten Ordnung klein ist. Ein einzelner Wirbelfaden kann daher bei endlichem w immer nur ein unendlich kleines Feld erzeugen, das in der unmittelbaren Umgebung des Fadens klein von der ersten und in endlichen Abständen davon klein von der zweiten Ordnung ist.

Dass wir bei einem einzigen Wirbelfaden keinen endlichen Werth für W annehmen dürfen, folgt übrigens auch schon daraus, dass sonst die Geschwindigkeit v in der unmittelbaren Nachbarschaft der Wirbellinie unendlich gross würde. — Es verhält sich damit ganz ähnlich, wie bei einer punktförmigen Quelle. Für Stellen des Feldes, die von der Quelle oder dem Wirbelfaden weit genug abliegen, kann man sich immerhin die Quelle in einem Punkte oder den Wirbelfaden in einer Linie concentrirt denken. Sobald wir aber in die Nachbarschaft der Quelle oder des Wirbels rücken, müssen wir uns beide in räumlicher Vertheilung denken. So wird auch das von der Quelle $q d\tau$ im Volumenelemente $d\tau$ herrührende Feld in der unmittelbaren Nachbarschaft unendlich klein von der ersten Ordnung, ganz wie wir dies für die Nachbarschaft eines einzelnen Wirbelfadens mit endlichem w gefunden haben.

Ueberhaupt muss man es als eine Thatsache von grösster Wichtigkeit sowohl für die reine Funktionentheorie als besonders für die sich darauf stützenden physikalischen Anwendungen ansehen, dass Quelle und Wirbel in engster Verwandtschaft mit einander stehen. Ich werde in dieser Schrift noch öfters darauf hinweisen und begnüge mich an dieser Stelle

mit einer Bemerkung über den Zusammenhang zwischen dem Felde $\mathfrak{u}$ und dem zugehörigen Quellensysteme einer- oder dem Wirbelsysteme andererseits. In der Fernwirkungstheorie der Elektrizität werden die Quellen der elektrostatischen Felder als die Ursachen dieser Felder angesehen. In unserer rein geometrischen Theorie der Felder liegt zu einer solchen Auffassung kein Grund vor; ebensogut könnte man nach ihr das Feld als die Ursache seiner Quellen betrachten. In der That bedingen sich beide, das wirbelfreie Vectorfeld und das Quellsystem gegenseitig, ohne dass sich entscheiden liesse, was von beiden ursprünglicher oder wichtiger wäre. Ganz so ist es auch mit dem Wirbelfaden. Man betrachtet wohl den in einem linearen Leiter fließenden elektrischen Strom als die Ursache des magnetischen Feldes. Für die geometrische Theorie der Felder kommen aber beide nur als Wirbelfaden und Wirbelfeld, also als einander zugeordnet in Betracht. In der That hat man ja auch von manchen Seiten her schon damit begonnen, das causale Verhältniss umzukehren und das magnetische Feld als das ursprünglichere, das was man elektrischen Strom nennt, als eine Folge davon anzusehen. Dies kommt darauf hinaus, dass das Wirbelfeld als die Ursache seines Wirbelsystems aufgefasst wird. Hier müssen wir uns von allen derartigen Vermuthungen fern halten. Zur Erzielung einer kürzeren Ausdrucksweise wird es jedoch gestattet sein, gelegentlich von dem Felde zu sprechen, das von einem gegebenen Wirbelfaden erzeugt wird oder — bei gleicher Bedeutung — von dem Wirbelfaden, der von dem Felde hervorgebracht wird.

Legt man durch den schon vorher erwähnten Integrationsweg, der den Wirbelfaden einmal umschlingt, mehrere Flächen, so muss nach dem Stokes'schen Satze, d. h. nach Gl. (72) $\int \mathfrak{u} \mathfrak{R} df$ für alle von diesen Flächen getroffenen Querschnitte des Wirbelfadens denselben Werth besitzen. Dies folgt übrigens auch schon aus dem in Gl. (70) ausgesprochenen Satze, dass das Feld $\mathfrak{u}$ stets quellenfrei ist.

Zugleich geht daraus hervor, dass in einem Felde, das von einem einzelnen Wirbelfaden erzeugt wird, das Linien-

integral $\oint \mathbf{v} d\mathbf{s}$ für jeden Integrationsweg, der den Wirbelfaden einmal umkettet, denselben Werth annehmen muss; denn dieses Integral ist in jedem Falle gleich dem Flusse des Feldes $\mathbf{w}$ durch den Wirbelfadenquerschnitt. Dieser Fluss oder die Grösse W in Gl. (72) kann daher geradezu als die Gesamtintensität oder als die Stärke des ganzen Fadens bezeichnet werden. Um einen Wirbelfaden vollständig zu bestimmen, genügt es, seine Leitlinie und seine Stärke W anzugeben. Nur dann, wenn man etwa Werth darauf legen sollte, das von dem Wirbelfaden in seiner unmittelbaren Nachbarschaft erzeugte Feld näher zu bestimmen, müsste noch eine Angabe darüber hinzutreten, wie sich die Gesamtintensität W über den Querschnitt des Fadens vertheilt. Bei den physikalischen Anwendungen hat man es immer mit Wirbeln von endlichen Querschnittsabmessungen und endlicher Stärke zu thun. In grösseren Abständen kann man diese häufig mit hinreichender Genauigkeit wie einzelne Wirbelfäden behandeln; in der Nähe oder in dem vom Wirbel eingenommenen Raume selbst zerlegt man den Wirbel in ein Bündel aus Wirbelfäden, so dass die Intensität jedes Wirbelfadens unendlich klein ist. Der Beitrag, den ein einzelner Wirbelfaden an irgend einer Stelle selbst in seiner unmittelbaren Nachbarschaft oder auf seiner Oberfläche oder in seinem Innern zu dem ganzen Felde liefert, verschwindet dann immer gegenüber der Gesamtwirkung. In der That genügt es daher, für einen einzelnen Wirbelfaden das Feld $\mathbf{v}$ in endlichen Abständen von der Leitlinie zu berechnen.

Wir haben jetzt für einen Wirbelfaden dieselbe Aufgabe zu lösen, die für eine Elementarquelle $q d\tau$ schon im ersten Capitel gelöst wurde, nämlich das von dem Wirbelfaden erzeugte Feld in endlicher Entfernung von dem Faden zu berechnen, wenn die Leitlinie und die Stärke des Fadens gegeben sind. Freilich ist die Lösung der Aufgabe hier verwickelter als sie dort war; ich lege aber Werth darauf, die enge Verwandtschaft beider Aufgaben zu betonen.

§ 19. Zurückführung des Feldes auf ein wirbelfreies.

Mit der Untersuchung von Wirbelfeldern musste man sich in der Elektrizitätslehre schon sehr frühzeitig beschäftigen. Natürlich suchte man Aufgaben dieser Art ähnlich zu erledigen wie die Berechnung der wirbelfreien Kraftfelder, die nach den Attractionsgesetzen auftreten, wozu man bereits recht brauchbare Methoden gefunden hatte. Wir sahen auch vorher schon, wie nahe ein solches Verfahren bei einem Felde liegt, das sonst überall wirbelfrei ist und in einem einzigen Wirbelfaden gewissermassen eine Ausnahmestelle besitzt. Es ist in der That nur nöthig, an die Stelle des Wirbelfeldes ein wirbelfreies, von Quellen herrührendes zu setzen, das bis auf geringe Unterschiede mit ihm übereinstimmt oder ihm wenigstens in solchem Grade gleicht, dass man es mit einem gewissen Rechte als einen Ersatz des Wirbelfeldes betrachten darf. Es ist selbstverständlich, dass dieser breit offen stehende Weg sofort benutzt wurde, ohne dass man es sich vorläufig angelegen sein liess, andere Methoden auszuarbeiten, die dem Geiste der neuen Aufgabe besser angepasst gewesen wären. So entstanden die berühmten Theorieen der Doppelbelegungen, — vielleicht das glänzendste Beispiel dafür, wie viel man mit an sich ganz ungeeigneten und unzulänglichen Hülfsmitteln erreichen kann.

Um die Lösung unserer Aufgabe auf diesem Wege vorzubereiten, beweise ich zunächst, dass das Wirbelfeld durch seinen Wirbelfaden und die Bedingung, dass es quellenfrei sein und im Unendlichen verschwinden soll, eindeutig bestimmt ist. Um Wiederholungen zu vermeiden, will ich hierbei gleich annehmen, dass das Wirbelsystem des Feldes ganz beliebig gegeben sei, so dass es sich also nicht auf einen einzigen Wirbelfaden zu beschränken braucht.

Angenommen, es seien zwei quellenfreie Felder $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ möglich, die zu demselben Wirbelsysteme $\mathbf{w}$ gehören. Dann bilde man das Differenzfeld $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$, ganz wie es schon in § 7 bei einer ähnlichen Betrachtung geschehen war. Aus

der Definitionsgleichung (35), durch die der Begriff des Wirbels $\mathfrak{w}$ eingeführt wurde, schliesst man, dass

$$\text{curl } \mathfrak{v} = \text{curl } \mathfrak{v}_1 - \text{curl } \mathfrak{v}_2$$

in unserem Falle also gleich Null ist. Ebenso ist auch, wie schon bei jener früheren Gelegenheit gezeigt wurde, $\text{div } \mathfrak{v} = 0$. Da sich das Feld nicht ins Unendliche erstrecken soll, folgt wie damals, dass $\mathfrak{v}$ überall Null und daher $\mathfrak{v}_1 = \mathfrak{v}_2$ sein muss.

Wir kehren jetzt wieder zu dem Felde mit einem einzelnen Wirbelfaden zurück und denken uns in diesem Felde zwei unendlich benachbarte Flächen von sonst beliebiger Gestalt, aber endlicher Krümmung gezogen, so dass der Umriss von jeder bis zu dem Wirbelfaden reicht. Da der Wirbelfaden einen unendlich kleinen Querschnitt haben sollte, kann man sich den Abstand beider Flächen etwa so gross denken, dass der Wirbelfaden den Raum zwischen beiden Flächen gerade abschliesst. Hierauf besetze man die eine Fläche mit positiven, die andere mit negativen Quellen und betrachte das zu dieser Quellenvertheilung gehörige wirbelfreie Feld. Man kann zwar gegen diese Konstruktion einwenden, dass eine endliche Quellenenergiebigkeit, die auf einer Fläche concentrirt sein soll, gegen den Grundsatz verstösst, dass die Raumdichte einer Quelle endlich bleiben muss. Indessen handelt es sich hier gar nicht um ein wirkliches physikalisches Feld, bei dem wir an dieser Forderung festhalten müssten, sondern um einen Kunstgriff zur Ableitung des richtigen Resultats, wobei wir eine Vertheilung dieser Art als Grenzfall immer als zulässig betrachten können. Dass das auf diesem Wege gefundene Resultat wirklich richtig ist, vermögen wir nachträglich ganz unabhängig von der Art der Ableitung leicht festzustellen.

Von dem Wirbel selbst ist jetzt vorläufig gar nicht mehr die Rede; dieser soll vielmehr durch die Quellendoppelbelegung ersetzt werden. Man sieht schon ohne jede Rechnung ein, dass der Hauptantheil des den positiven Quellen entströmenden Flusses auf dem nächsten Wege — durch den unendlich dünnen Zwischenraum zwischen beiden Flächen — nach den be-

nachbarten Sinkstellen übergeht. Ein geringer Bruchtheil, der, wie wir sehen werden, unendlich klein gegen den ersten Antheil ist, muss indessen nothwendig auch durch den äusseren Raum strömen. Denn das Feld rührt jetzt nur von den Quellen her; es ist mit anderen Worten wirbelfrei und das Linienintegral $\int \mathbf{v} d\mathbf{s}$ muss daher für jede geschlossene Curve Null ergeben. Wir denken uns eine solche Curve gezogen, von der ein Linienelement den Innenraum zwischen beiden Flächen durchkreuzt, während die Curve sonst überall im äusseren Raume bleibt und sich jenseits des Randes der Fläche schliesst. Der Wirbelfaden, der seine eigentliche Bedeutung einstweilen eingebüsst hat, wird von dieser Curve einmal unkettet. Zu dem Integrale $\int \mathbf{v} d\mathbf{s}$ für diesen Integrationsweg liefert das Linienelement im Innenraume einen Beitrag, der negativ ist, falls wir den Umlaufssinn von $d\mathbf{s}$ so wählen, dass er im Innenraume entgegengesetzt der dort stattfindenden Strömung ist. Damit das ganze Integral verschwindet, muss daher der ganze Rest des Integrationsweges einen positiven Beitrag von dem gleichen Absolutwerth liefern. Damit ist zunächst bewiesen, dass ein Theil der ganzen Strömung in der That auch durch den äusseren Raum um den Rand der Flächen herum von den positiven zu den negativen Quellen strömen muss.

Zugleich erkennen wir, dass die Geschwindigkeit im äusseren Raume unendlich klein sein muss gegenüber der im inneren Raume, denn die Integration über einen endlichen Weg liefert aussen nur denselben Absolutwerth, wie die über den unendlich kleinen Weg im Innenraume. Wir können daher auch die Stromgeschwindigkeit im Innenraume berechnen. Hierzu grenze ich auf beiden Flächen zwei sich gegenüber liegende Elemente ab, deren Abmessungen klein gegenüber den Krümmungsradien der Fläche, aber gross im Verhältnisse zu dem Abstände h zwischen beiden Flächen gewählt werden mögen. Der Inhalt jedes dieser beiden Flächenelemente sei mit df , die auf die Flächeneinheit bezogene Quellenergiebigkeit an dieser Stelle sei mit $+q$ bzw. $-q$ bezeichnet. Bis auf den verschwindenden Bruchtheil, der durch den äusseren

Raum geht, strömt dann die Menge qdf in der Zeiteinheit von dem positiv zu dem negativ belegten Flächenelement durch den Innenraum hindurch. Bis auf unendlich kleine Grössen genau, kann daher die Stromgeschwindigkeit im Innenraum gleich q und der Beitrag, den der Innenraum zu dem Linienintegrale $\int \mathbf{v} d\mathbf{s}$ liefert, gleich $-qh$ gesetzt werden.

Wir schliessen daraus weiter, dass der im äusseren Raume liegende Theil des Integrationswegs den Beitrag $+qh$ zum Linienintegrale liefert. Setzen wir ferner noch fest, dass die Quellenvertheilung auf beiden Flächen so gewählt werden soll, dass das Produkt qh an jeder Stelle denselben Werth hat, so ist auch für jeden beliebigen nicht geschlossenen Integrationsweg, den wir um den Rand herum von der positiven Fläche zu dem gegenüber liegenden Punkte der negativen Fläche führen können, das Linienintegral immer von derselben Grösse $+qh$.

Nachdem wir in dieser freilich etwas künstlichen Weise ein wirbelfreies Feld construirt haben, vergleichen wir es mit dem Wirbelfelde, das uns ursprünglich interessirte. Es unterscheidet sich von dem Felde, das der Wirbelfaden ohne Zuhülfenahme der Quellen erzeugte, ganz erheblich im Innenraume, gleicht ihm aber vollkommen im Aussenraume.

In beiden Fällen gehen die Stromlinien um den Rand oder um den Wirbelfaden herum. Beim Feld der Doppelbelegung gibt die Integration $\int \mathbf{v} d\mathbf{s}$ mit Ausschluss des unendlich kleinen Stücks im Innenraume den constanten Werth qh ; beim Wirbelfeld erhält man einen solchen constanten Werth allerdings erst unter Beziehung des Linienelementes im Innenraume zum Integrationswege. Hier ist der Beitrag dieses Linienelementes jedoch unendlich klein gegenüber dem Werthe des ganzen Integrals, so dass auch in dieser Hinsicht beide Felder im Aussenraume bis auf unendlich kleine Grössen übereinstimmen.

Nachdem man mit Hülfe der Doppelbelegung das gewünschte Feld im Aussenraume hergestellt hat, braucht man daher nachträglich die Doppelbelegung nur wieder zu entfernen,

könnten, also etwa wie undurchdringliche Wände wirkten. Sie dienten uns nur als geometrische Oerter, durch die den Doppelbelegungen ihre Stellen im Raume zugewiesen wurden und nicht als Trennungsflächen. Ueberhaupt kann in der allgemeinen Geometrie der Felder oder in der Theorie der Vectorfunktionen von eigentlichen Trennungsflächen, durch die etwa der Fluss eines Feldes abgesperrt werden könnte, — obschon eine solche Vorstellung bei anderen Untersuchungen recht wohl zulässig und nützlich sein kann — niemals die Rede sein. Hier steht uns immer der ganze unendliche Raum ohne jede Abgrenzung für die Zwecke unserer Abbildung zur Verfügung, gerade so wie bei der Abbildung der Funktion einer scalaren Veränderlichen durch eine Curve z. B. der Rand des Zeichenspapiers niemals von Bedeutung ist.

§ 20. Lösung der Aufgabe.

Nach dieser Vorbereitung kann die Feldgrösse $\mathfrak{u}$ leicht berechnet werden, wenn der zugehörige Wirbelfaden gegeben ist. Man braucht dazu nur die im ersten Capitel auseinandergesetzte Methode auf das Quellensystem der Doppelbelegung anzuwenden. Ein Flächenelement df der positiven Belegung liefert nach Gl. (28) zu dem Potentiale V den Beitrag $+qdf/4\pi a$. Ausser dem Vorzeichen ändert sich bei dem zugehörigen Element der negativen Belegung nur noch der Abstand a vom Aufpunkt, für den wir V berechnen wollen, gegenüber dem vorstehend angegebenen Werthe. Die Aenderung von a kann mit $h \cdot da/dh$ bezeichnet werden, wenn h , wie vorher, der Abstand beider Flächen ist. Summirt man die Beiträge der zusammengehörigen Elemente beider Belegungen, so erhält man als Gesamtbeitrag von df zu dem Potentiale V

$$dV = \frac{qdf}{4\pi a^2} h \frac{da}{dh} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (74)$$

Um V zu erhalten, braucht man diesen Ausdruck nur über die ganze Fläche zu integrieren. Vorher sei indessen noch eine kleine Umformung damit vorgenommen, durch die man zu

der höchst eleganten Lösung gelangt, die Gauss von unserem Probleme gegeben hat.

Der räumliche Winkel, unter dem die Fläche df (es ist hierbei gleichgültig, ob man an die der positiven oder die der negativen Belegung denkt) vom Aufpunkte aus gesehen erscheint, sei mit $d\varpi$ bezeichnet. Unter $d\varpi$ ist also eine absolute Zahl zu verstehen, die mit dem Quadrat des Radius einer Kugel multiplicirt die Fläche des Ausschnitts auf der Kugeloberfläche angibt, der von dem körperlichen Winkel gebildet wird, wenn der Scheitel mit dem Kugelmittelpunkt zusammenfällt. Dem ganzen Raume entspricht demnach der körperliche Winkel $\varpi = 4\pi$; kurzum der körperliche Winkel soll genau in derselben Weise benutzt und nach Flächenmaass ausgemessen werden, wie es mit dem nach Bogenmaass gemessenen ebenen Winkel gebräuchlich ist.

Steht zufällig df senkrecht zum Abstände a des Aufpunktes von df , so bestimmt sich der zugehörige körperliche Winkel nach seiner Definition einfach aus der Gleichung $a^2 d\varpi = df$. Im anderen Falle hat man in dieser Gleichung an Stelle von df selbst die Projektion von df auf die vom Aufpunkte aus gezogene Kugelfläche zu setzen. Zu df steht aber dh und zur Kugelfläche steht da senkrecht, denn da war die Projektion von dh auf den Radius a . Der Winkel zwischen df und der Kugelfläche kann gleich dem Winkel zwischen den beiden Normalen gesetzt werden. Für die Projektion von df auf die Kugel erhält man also $df \cdot \frac{da}{dh}$ und hiermit

$$d\varpi = \frac{df}{a^2} \cdot \frac{da}{dh} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (75)$$

Mit Benutzung des Winkels $d\varpi$ kann Gl. (74) daher

$$dV = \frac{1}{4\pi} qh d\varpi \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (76)$$

geschrieben und diese Gleichung kann ohne Weiteres über die ganze Kugelfläche integrirt werden. Beachtet man noch Gl. (73) und versteht man unter ϖ den körperlichen Winkel, unter

dem der ganze Wirbelfaden vom Aufpunkte aus gesehen erscheint, so erhält man einfach

$$V = \frac{1}{4\pi} W \varpi. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (77)$$

Das ist die von Gauss gegebene Lösung. Einen besonderen Vorzug, den sie besitzt, erkennt man, wenn man sich den Aufpunkt längs einer Curve fortgerückt denkt, die den Wirbelfaden kettenförmig umschlingt. Um die Vorstellung zu erleichtern, möge man sich den Wirbelfaden etwa kreisförmig denken. Dann gehe man von einem Aufpunkte aus, der in der Ebene des Kreises, aber ausserhalb der Kreisfläche liegt. Für diesen Aufpunkt ist $\varpi = 0$ und daher ist auch $V = 0$ zu setzen. Hierauf verschiebe man den Aufpunkt nach der einen Seite der Kreisebene hin, die als die Vorderseite bezeichnet werden möge. Der Wirbelfaden wird jetzt vom Aufpunkte aus durch eine Kegelfläche projecirt und die Kegelöffnung gibt ϖ an. Beim Weiterschreiten wächst die Kegelöffnung allmählich und wenn der Aufpunkt die auf der Vorderseite liegende Hälfte des den Wirbelfaden umkettenden Weges durchlaufen hat, so dass er jetzt wieder in der Kreisebene und zwar im Innern der Kreisfläche liegt, ist der körperliche Winkel auf 2π und das Potential auf $W/2$ angewachsen. Wir rücken den Aufpunkt auf seinem Wege weiter, wobei er auf die Hinterseite der Kreisebene tritt. Wenn man jetzt den Blick zurück wendet, sieht man den Wirbelfaden unter einem körperlichen Winkel, der allmählich abnimmt, ebenso wie er vorher zugenommen hatte. Aber wir dürfen nicht plötzlich die Richtung wechseln, in der wir sehen; wir müssen nach wie vor in der Richtung des Aufpunktweges sehen. Physiologisch genommen sehen wir dann allerdings gar nichts mehr, da der Wirbelfaden hinter uns liegt. Geometrisch können wir aber immer noch von dem Gesichtswinkel reden, unter dem der Wirbelfaden bei dieser Blickrichtung erscheint. Dieser Gesichtswinkel umfasst den ganzen Raum mit Ausnahme des Winkels, unter dem der Wirbelfaden bei der Umkehrung der Blickrichtung gesehen wird. In diesem Sinne aufgefasst, wächst der Winkel

$\bar{\omega}$ beim Vorwärtsschreiten immer weiter und nachdem wir den ganzen Weg bis zum Ausgangspunkt zurück durchlaufen haben, ist er bis auf 4π , d. h. bis auf den ganzen Raum angewachsen, während er zuerst an derselben Stelle gleich Null war.

Man sieht, dass durch diese Konstruktion auch schon dem Umstande Rechnung getragen ist, dass für einen den Wirbelfaden kettenartig umschlingenden Integrationsweg $\int \mathbf{v} d\mathbf{s}$ von Null verschieden und zwar gleich W ist, dass also auch V sich um ebensoviel ändert. Das durch Gl. (77) dargestellte Potential wird hierdurch als unendlich vieldeutig gekennzeichnet und wir wollen dies noch dadurch besser hervorheben, dass wir an Stelle von Gl. (77) setzen

$$V = W \left(\frac{\bar{\omega}}{4\pi} \pm n \right), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (78)$$

wenn n eine beliebige ganze Zahl bedeutet.

Wir sind von der Doppelbelegung ausgegangen und haben V für den Aussenraum berechnet. Nachträglich ist aber die Doppelbelegung ganz aus unseren Formeln verschwunden. Wir haben daher mehr gefunden, als wir bei einem solchen Ausgangspunkte ursprünglich erwarten konnten, nämlich eine für den ganzen Raum, nur mit Ausschluss des Wirbelfadens selbst, aber mit Einschluss des Innenraums der vorher betrachteten Doppelbelegung gültige Darstellung des Potentials des von dem Wirbelfaden erzeugten Feldes. In der That hat die Einführung der Doppelbelegung nur einen heuristischen Werth. Sie wurde veranlasst durch das Bestreben, das Wirbelfeld auf ein wirbelfreies zurückzuführen, ist aber zum Beweise der Gültigkeit der in Gl. (78) gefundenen Lösung ganz entbehrlich. Man könnte sich in der That damit begnügen, ohne vorher irgendwie auf die Doppelbelegung einzugehen, Gl. (78) aufzustellen und dann mit leichter Mühe nachzuweisen, dass das aus diesem Potentiale V hervorgehende Vectorfeld $\mathbf{v}$ einen Wirbelfaden besitzt, der nach Gestalt und Stärke mit dem ursprünglich gegebenen vollständig übereinstimmt. Wegen der Eindeutig-

keit der Lösung unserer Aufgabe folgt dann sofort, dass diese durch Gl. (78) richtig angegeben wird.

Eine unendlich vieldeutige Grösse wie V in Gl. (78) kann freilich keinen Anspruch auf eine selbständige physikalische Bedeutung machen; sie bildet nur einen Rechenbehelf, woraus die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ des Feldes durch Ausführung der Operation $-\nabla$ gewonnen wird. Für $\mathfrak{v}$ hat man

$$\mathfrak{v} = -\frac{1}{4\pi} W \nabla \bar{\omega} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (79)$$

und hiermit ist die gestellte Aufgabe in der That vollständig gelöst.

§ 21. Andere Form der gefundenen Lösung.

Die letzte Gleichung soll jetzt noch dadurch weiter umgestaltet werden, dass wir die Aenderung des Gesichtswinkels $\bar{\omega}$ bei einer Verschiebung des Aufpunktes wirklich berechnen. Eine unendlich kleine Verschiebung des Aufpunktes in beliebiger Richtung sei mit $d\mathfrak{r}$, die zugehörige Aenderung von $\bar{\omega}$ mit $d\bar{\omega}$ bezeichnet. Um $d\bar{\omega}$ zu finden, können wir auch den Aufpunkt an seiner Stelle lassen und dem Wirbelfaden eine translatorische Verschiebung $-\mathfrak{d}\mathfrak{r}$ ertheilen. Dies kommt darauf hinaus, dass die beiden mit einander zu vergleichenden körperlichen Winkel mit ihren Scheiteln zur Deckung gebracht werden. In der Hauptsache decken sich dann auch beide Kegelöffnungen, so dass wir nur auf die kleinen Abweichungen zu achten brauchen, die am Umfange vorkommen.

Das Linienelement $d\mathfrak{s}$ des Wirbelfadens beschreibt, wenn die Verschiebung $-\mathfrak{d}\mathfrak{r}$ mit ihm vorgenommen wird, eine Parallelogrammfläche, deren Inhalt gleich dem Absolutbetrage des äusseren Produkts $V d\mathfrak{s} d\mathfrak{r}$ gesetzt werden kann. Dazu gehört eine Pyramide, deren Spitze im Aufpunkte liegt und deren Volumen gleich $\frac{1}{3} \mathfrak{a} V d\mathfrak{s} d\mathfrak{r}$ ist, wenn $\mathfrak{a}$ den Radiusvector vom Aufpunkte nach $d\mathfrak{s}$ bezeichnet. Das Vorzeichen dieses Ausdrucks hängt von der Richtung ab, in der man den Umlaufssinn von $d\mathfrak{s}$ gewählt hat. Jedenfalls wechselt aber, nach-

dem der Umlaufssinn ein für alle Male festgesetzt ist, das Vorzeichen, jenachdem die Pyramide als Zuwachs zu dem ursprünglichen Kegelvolumen tritt oder davon in Abzug kommt.

Die der Pyramide entsprechende Aenderung des körperlichen Winkels findet man aus dem Volumen der Pyramide durch Division mit $\frac{a^3}{3}$. Im Ganzen wird daher, von dem nachträglich noch festzustellenden Vorzeichen abgesehen,

$$d\bar{\omega} = \int \frac{1}{a^3} \mathfrak{a} V d\mathfrak{s} d\mathfrak{r} = d\mathfrak{r} \int V \frac{\mathfrak{a}}{a^3} d\mathfrak{s}. \quad . \quad . \quad (80)$$

Bei der letzten Umformung ist von einem schon in § 16 benutzten Satze über das Rechnen mit geometrischen Produkten Gebrauch gemacht und die constante Grösse $d\mathfrak{r}$ vor das Integralzeichen gesetzt worden. Gl. (80) gilt für jede beliebige Verschiebung $d\mathfrak{r}$, falls sie nur unendlich klein ist. Der zu $d\mathfrak{r}$ tretende Faktor ist daher jene Grösse, die nach unserer früheren Bezeichnung das negative Gefäll von $\bar{\omega}$ bildet, das durch die Operation ∇ gefunden wird (vergl. Gl. 17). Wir haben daher

$$\nabla \bar{\omega} = \int V \frac{\mathfrak{a}}{a^3} d\mathfrak{s}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (81)$$

wobei die Integration natürlich, wie vorher schon, über die ganze Länge des Wirbelfadens zu erstrecken ist. Setzt man diesen Werth in Gl. (79) ein, so erhält man, abgesehen vom Vorzeichen, dessen endgültige Festsetzung schon in den vor ausgehenden Formeln unterblieben war,

$$\mathfrak{v} = \frac{W}{4\pi} \int V \frac{\mathfrak{a}}{a^3} d\mathfrak{s}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (82)$$

Die noch ausstehende Vorzeichenbestimmung ergibt sich nachträglich leicht aus den Bemerkungen in § 16. Unter der Voraussetzung, dass W stets positiv gerechnet und der Umlaufssinn des Wirbels durch die Richtung von $d\mathfrak{s}$ zum Ausdruck gebracht wird, muss die Aufeinanderfolge $d\mathfrak{s}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{a}$ zu einem Rechtssystem im Raume führen, damit Gl. (82) auch dem Vorzeichen nach richtig ist. Bei gegebenem Pfeil von $d\mathfrak{s}$ wird dadurch der Pfeil von $\mathfrak{v}$ bestimmt und umgekehrt.

Man kann dies auch so ausdrücken, dass die Richtung, in der die Wirbellinie umströmt wird, verbunden mit der Richtung $d\mathfrak{s}$ des Wirbelfadens selbst zu einer rechtsgängigen Schraube führt.

Gl. (82) stellt $\mathfrak{v}$ in der Form eines Integrals über die in sich geschlossene Leitlinie des Wirbelfadens dar. Die Versuchung liegt nahe genug, dieses Integral in seine einzelnen Elemente aufzulösen, also festzusetzen, dass jedes Längenelement des Wirbelfadens zum ganzen Felde den Beitrag

$$d\mathfrak{v} = \frac{W}{4\pi} V \frac{\mathfrak{a}}{a^3} d\mathfrak{s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (83)$$

liefere. Das von einem einzelnen Wirbelfadenelement herrührende $d\mathfrak{v}$ steht dann senkrecht zu der durch den Aufpunkt und $d\mathfrak{s}$ gelegten Ebene, geht in jener Richtung, die für den Ampère'schen Schwimmer durch die ausgestreckte linke Hand angezeigt wird, ist proportional der Wirbelstärke W , der Länge von $d\mathfrak{s}$ und dem Sinus des Winkels zwischen $\mathfrak{a}$ und $d\mathfrak{s}$ und umgekehrt proportional dem Quadrate des Abstandes a zwischen Aufpunkt und Wirbelfadenelement. Wir haben damit das Biot-Savart'sche Gesetz, das in der Lehre vom Elektromagnetismus eine so bedeutende Rolle spielt. Zugleich erkennen wir aber, dass seine Gültigkeit nicht auf diesen speciellen Fall beschränkt ist, sondern dass es auf einer allgemeinen Eigenschaft der Vectorfunktionen beruht.

Hiermit entsteht die Frage, ob wir wirklich den möglichst einfachen Fall ausgesucht hatten, als wir das von einem einzelnen Wirbelfaden erzeugte Feld untersuchten. Die Vermuthung liegt nahe genug, dass der einfachste Fall vielmehr durch das Feld mit einem einzigen Wirbelfadenelement gebildet würde. Das wäre aber ein Irrthum. Wollten wir das durch Gl. (83) definirte Feld für sich betrachten, so würden wir bald finden, dass der Wirbel in ihm gar nicht auf das Element $d\mathfrak{s}$ beschränkt ist. Sobald man die Operation curl an dem durch Gl. (83) für $d\mathfrak{v}$ gegebenen Werthe ausführt, überzeugt man sich vielmehr, dass der ganze Raum hierbei von einem Wirbelsystem ausgefüllt wird. Das war auch von vornherein nicht anders

zu erwarten, denn schon früher hatten wir gefunden, dass $\text{div } \mathbf{w}$ immer Null, dass also ein selbständiges Wirbelfadenelement mit einem Anfange und einem Ende eine geometrische Unmöglichkeit ist.

Die Benutzung von Gl. (83) ist daher nur insoweit zulässig, als man sich vorbehält, den Ausdruck nachträglich über die ganze Ausdehnung des Wirbelfadens zu integrieren; Gl. (83) ist immer nur als eine Vorstufe von Gl. (82) zu betrachten, deren Gültigkeit allein bewiesen ist. Es hat überhaupt keinen Sinn, wenn man z. B. von dem durch ein Stromelement erzeugten magnetischen Felde — oder gar von einem elementaren Potentiale zwischen zwei Stromelementen, wie in der älteren Helmholtz'schen Theorie der Elektrodynamik — redet; man verfällt damit in jene Irrthümer, an denen die Geschichte der Elektrizitätslehre gerade reich genug ist.

§ 22. Gerichtete Quellen und Ampère'sche Wirbel.

Das Bestreben, den Wirbelfaden auf noch einfachere Elemente zurückzuführen, aus denen er zusammengesetzt gedacht werden kann, ist an sich vollständig berechtigt. Nach den vorausgehenden Erörterungen kann dies aber immer nur dadurch geschehen, dass jedes Element für sich genommen wieder einen in sich geschlossenen Wirbelfaden bildet. Die einzige Vereinfachung, die unser Problem noch zulässt, kann also nur darin bestehen, dass wir die Wirbellinie auf ein unendlich kleines Gebiet beschränken.

In der That kann ein Wirbelfaden von endlicher Ausdehnung immer auf verschiedene Art durch eine zweifach unendliche Anzahl von Wirbelfäden zusammengesetzt werden, von denen sich jeder nur über einen unendlich kleinen Bezirk erstreckt. Eine Zerlegung dieser Art wurde schon in § 17 vorgenommen und ich kann mich hier damit begnügen, auf jene Stelle zurück zu verweisen.

Die Zerlegung in Elementarwirbel zeigt zugleich die zwischen Quellen und Wirbeln bestehende und hier schon

wiederholt betonte Verwandtschaft von einer neuen Seite her. Ein Elementarwirbel — also ein in sich geschlossener Wirbelfaden von überall unendlich kleinen Abmessungen — bedingt, dass ein gewisser Fluss durch seine Oeffnung hindurchgeht, während eine Quelle bedingt, dass ein gewisser Fluss von ihr aus nach allen Seiten hin ausgeht. Der Quelle als Ursache eines Feldes kommt keine bestimmte Richtung zu, wohl aber dem Wirbel. Man kann den Elementarwirbel als eine gerichtete Quelle ansehen, wobei freilich im Auge zu behalten ist, dass der Elementarwirbel nicht neu erzeugte Flüssigkeit ins Feld ausströmen lässt wie die Quelle, sondern nur eine Strömung der schon vorhandenen Flüssigkeit anregt.

Der vollständigen Durchführung des Vergleiches steht auch die Schwierigkeit entgegen, dass man nicht anzugeben vermag, wie gross der Fluss durch den Elementarwirbel — oder mit anderen Worten die Ergiebigkeit der gerichteten Quelle — ist, ohne dass eine nähere Festsetzung über den Querschnitt des Wirbelfadens und die Vertheilung des Wirbels über diesen Querschnitt hinzukommt.

Allzuviel Werth ist daher auf den gezogenen Vergleich nicht zu legen. Ich habe ihn auch hauptsächlich darum angeführt, weil das, was man in der Elektrizitätslehre als eingeprägte Kraft bezeichnet, vollständig den Charakter einer gerichteten Quelle trägt. Aus unseren Erörterungen können wir schliessen, dass man besser thut, eingeprägte Kräfte dieser Art durch die ihnen entsprechenden Wirbel zu ersetzen.

Ich möchte hier an eins der berühmtesten Beispiele der Anwendungen der hier vorgetragenen Lehren erinnern. Bei der Untersuchung der magnetischen Erscheinungen wurde man zuerst sehr eindringlich auf das Studium der Wirbelfelder hingewiesen. Während man anfänglich angenommen hatte, dass das magnetische Feld eines Stahlmagneten wirbelfrei sei, dann aber gefunden hatte, dass der elektrische Strom ein magnetisches Wirbelfeld erzeugt, wies Ampère nach, dass sich auch die Erscheinungen an den Stahlmagneten am besten erklären, wenn man ihre Felder als Wirbelfelder ansieht. Die

Molekularströme, die nach Ampère um jedes Eisenmolekül fließen, sind ja im Grunde genommen nur Elementarwirbel zur Erklärung des Feldes.

In meinem Buche über die Maxwell'sche Theorie habe ich eine Reihe von Gründen aufgezählt, die gegen die Ampère'sche Hypothese der Molekularströme sprechen, und ich bin vollständig davon überzeugt, dass diese Hypothese in ihrer ursprünglichen Form falsch und unhaltbar ist. Dass sich die Hypothese so lange zu halten vermochte, und dass sie von vielen Erscheinungen recht befriedigend Rechenschaft zu geben vermag, kommt daher, dass sie andererseits der Wahrheit in der That schon recht nahe kommt. Es war ein überaus glücklicher Gedanke, sich von der seit Newton her gewohnt gewordenen Anschauung, die physikalischen Felder stets als wirbelfrei aufzufassen und sie aus Quellen abzuleiten, zum ersten Male in der Lehre vom Magnetismus frei zu machen. Es darf heute als sicher gestellt gelten, dass die magnetischen Felder im Innern von magnetisch harten Körpern nicht wirbelfrei sind und jede Auffassung, die von der Benutzung magnetischer Massen absah und Wirbel zuliess, musste einen gewaltigen Fortschritt in der Erkenntniss der magnetischen Felder vorbereiten.

Nicht gegen die Elementarwirbel der Ampère'schen Theorie an sich richten sich auch in der That alle Einwände, die man gegen diese Theorie seither vorgebracht hat, sondern nur gegen die Identificirung der Wirbel mit elektrischen Strömen, denn zur Erklärung der Erscheinungen braucht man einen Wirbel des Feldes $\mathfrak{B}$ und nicht einen des Feldes $\mathfrak{S}$ wie bei der Ampère'schen Theorie.

Ich habe diese zum Theil noch nicht vollständig geklärten physikalischen Probleme hier kurz berührt, um darauf hinzuweisen, in wie engem Zusammenhange grade die strittigen Fragen mit der allgemeinen Theorie der Vectorfunktionen stehen. Ihre definitive Gestalt wird die Theorie des Magnetismus erst erlangen können, nachdem das ganze Gebiet mit den durch die Geometrie der Wirbelfelder an die Hand ge-

gegebenen Hilfsmitteln gründlich und folgerichtig durchsucht ist. Versuchsanordnungen, wie sie dem nur mit der Theorie der wirbelfreien Felder genauer bekannten Forscher geläufig sind oder nahe liegen, konnten hier zu keinen entscheidenden Ergebnissen führen. Denn das Experiment gestattet immer nur eine Entscheidung über die Zulässigkeit von Anschauungen, die vorher schon als möglich ins Auge gefasst waren; neue Begriffe, die etwa noch fehlen, lehrt es (wenigstens unmittelbar) nicht erfassen. Diese müssen auf anderem Wege gebildet werden.

Viertes Capitel.

Die Wirbelintegration der quellenfreien Vectorfunktionen.

§ 23. Das Vectorpotential.

Die Aufgabe, das Feld zu bestimmen, das von einem gegebenen Wirbelfaden erzeugt wird, ist zwar im vorausgehenden Capitel schon gelöst worden; die Lösung befriedigt aber nicht recht wegen des Umweges, der bei ihr eingeschlagen wurde. Die Zurückführung des Feldes auf ein wirbelfreies, das man mit den dafür gültigen Sätzen untersucht, die zu diesem Zwecke eingeführte, im Endergebniss aber wieder ganz herausfallende Doppelbelegung bilden einen Kunstgriff, der uns zwar das richtige Resultat finden lehrt, bei dessen Anwendung wir aber eine der Art der Aufgabe besser angepasste Methode vermissen.

Anstatt die gewöhnliche Potentialtheorie, die nur bei wirbelfreien Feldern eine einfache Bedeutung hat, so zurecht zu stutzen, dass sie auch hier noch zu einer Lösung führen kann, thut man in der That besser, bei den Wirbelfeldern die Hilfsgrösse V ganz aufzugeben und sich nach einem Ersatz dafür umzusehen. Wegen der schon oft betonten Verwandtschaft beider Felderclassen darf man von vornherein erwarten, dass

sich auch für die Wirbelfelder eine Funktion angeben lassen wird, die dasselbe für sie leistet, wie das Potential V für die von Quellen herrührenden wirbelfreien Felder.

Wir suchen also eine Grösse, aus der sich das quellenfreie Feld $\mathfrak{v}$ durch eine Differentialoperation grade so ableiten lässt wie früher das wirbelfreie Feld durch die Operation $-\nabla$. Mit anderen Worten heisst dies auch, dass wir für eine gegebene quellenfreie Vectorfunktion $\mathfrak{v} = f(\mathfrak{r})$ eine andere Art der geometrischen Integration aufsuchen wollen. Die Stammgrösse, die wir suchen, kann kein Scalar sein, denn für scalare Felder kennen wir nur eine Art der räumlichen Differentiation, nämlich ∇ , und diese führt, wie wir schon gesehen haben, im Allgemeinen nicht zu dem gewünschten Ziele. Wir müssen also eine Vectorfunktion $\mathfrak{A} = F(\mathfrak{r})$ zu bestimmen suchen, so dass sie als ein Integral der gegebenen Funktion $\mathfrak{v} = f(\mathfrak{r})$ angesehen werden kann, d. h. so, dass $\mathfrak{v}$ durch eine Raumdifferentiation aus $\mathfrak{A}$ hervorgeht. Ich lege Werth darauf, diese Beziehung zwischen den Grössen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{v}$ und den Zusammenhang mit dem Integrationsproblem der gewöhnlichen Funktionentheorie hier ausdrücklich hervorzuheben.

Für Vectorfunktionen kennen wir zwei Arten der Raumdifferentiation: die Operationen div und curl . Hier kann nur die zweite in Frage kommen, da die erste zu einer scalaren Grösse führen würde. Es bleibt also nur eine Möglichkeit für die Herstellung des gewünschten Integrales offen, nämlich $\mathfrak{A}$ so zu bestimmen, dass es der Gleichung

$$\mathfrak{v} = \text{curl } \mathfrak{A} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (84)$$

genügt. Natürlich ist aber $\mathfrak{A}$ durch diese Gleichung noch nicht vollständig bestimmt: wie bei jeder Integration kann noch eine willkürliche Grösse hinzutreten, die die Rolle einer Integrationsconstanten spielt. Jeder Lösung der Gl. (84) kann nämlich offenbar noch ein Glied $\mathfrak{A}_0$ zugefügt werden, das eine sonst ganz willkürliche Funktion von $\mathfrak{r}$ sein darf, wenn es nur der Bedingung

$$\text{curl } \mathfrak{A}_0 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (85)$$

genügt. Die Funktion $\mathfrak{A}_0$ ist hierdurch als eine wirbelfreie gekennzeichnet, der aber ein beliebiges Quellensystem $\text{div } \mathfrak{A}_0$ zugeordnet werden kann.

Unter allen hiernach möglichen Lösungen der Gl. (84) wollen wir die einfachste auswählen, nämlich jenen Werth von $\mathfrak{A}$, der zugleich im ganzen Felde quellenfrei ist. Zur eindeutigen Bestimmung der Integrationsaufgabe setzen wir also willkürlich fest, dass die Stammgrösse $\mathfrak{A}$ die Nebenbedingung

$$\operatorname{div} \mathfrak{N} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (86)$$

erfüllen soll. Dass $\mathfrak{A}$ durch die Gleichungen (84) und (86) und die selbstverständliche Bedingung, dass es im Unendlichen verschwinden soll, eindeutig bestimmt ist, ergibt sich sofort aus dem in § 19 bewiesenen Satze, dass eine quellenfreie Vectorfunktion, die sich nicht ins Unendliche erstreckt, durch ihr Wirbelsystem eindeutig definirt ist.

Für das in dieser Weise bestimmte Integral der Funktion $\mathfrak{u}$ ist in der Elektrizitätslehre die Bezeichnung Vectorpotential eingeführt. Bei dieser Bezeichnung tritt nicht deutlich genug hervor, dass es sich dabei um eine einfache Integration handelt; es möge mir daher gestattet sein, das Vectorpotential daneben auch als das Wirbelintegral der Funktion $\mathfrak{u}$ zu bezeichnen. Eine solche nähere Bezeichnung, die unmittelbar darauf hinweist, dass es sich um die Umkehrung der Differentialoperation curl handelt, ist auch namentlich desshalb erwünscht, weil man ein Operationszeichen nöthig hat, für das man die Abkürzung pot nicht benützen kann, da diese schon in anderer Bedeutung gebraucht wird. Ich benutze daher die Abkürzung WJ für das Wirbelintegral und setze

$$\mathfrak{A} = \mathbf{WJ} \mathfrak{h} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (87)$$

als Umkehrung oder Auflösung von Gl. (84) mit den vorher erwähnten Nebenbedingungen.

§ 24. Ermittlung des Integrals.

Wir nehmen zunächst mit Gl. (84) eine Raumdifferentiation vor. Die Operation div liefert mit Rücksicht auf Gl. (70)

$\operatorname{div} \mathfrak{v} = 0$. Wir erkennen daraus, dass sich das Vectorpotential ebenso nur zur Untersuchung der quellenfreien wie früher das scalare Potential V zur Untersuchung der wirbelfreien Felder eignet. — Dagegen liefert die Operation curl

$$\operatorname{curl}^2 \mathfrak{A} = \operatorname{curl} \mathfrak{v} = \mathfrak{w} (88)$$

Hier ist wieder der Wirbel $\mathfrak{w}$ des Feldes $\mathfrak{v}$ eingeführt. Mit dieser Gleichung lässt sich noch eine Umformung vornehmen, die nur auf eine veränderte Anordnung der einzelnen Glieder auf der linken Seite, wenn man sich diese in Coordinatenausdrücken entwickelt denkt, hinauskommt. Bezeichnet nämlich $\mathfrak{F}$ ein ganz beliebiges stetiges Feld, so ist stets

$$\operatorname{curl}^2 \mathfrak{F} = \nabla \operatorname{div} \mathfrak{F} - \nabla^2 \mathfrak{F} (89)$$

Man findet einen Beweis dieses Satzes in meinem früheren Buche (Gl. 72, S. 59), kann ihn aber auch leicht selbst führen, indem man die vorkommenden Rechensymbole nach den früher dafür gegebenen Vorschriften in Coordinaten ausdrückt. Auf das Vectorpotential angewendet, liefert Gl. (89) mit Rücksicht auf Gl. (86)

$$\operatorname{curl}^2 \mathfrak{A} = - \nabla^2 \mathfrak{A} (90)$$

Nach dieser Umformung, die auch in der älteren Elektrizitätslehre schon eine wichtige Rolle gespielt hat, obschon sie dort, wegen des mit ihr verbundenen Rechenbeiwerks, nicht so klar in die Erscheinung trat wie in Gl. (90), geht Gl. (88) über in

$$\nabla^2 \mathfrak{A} = - \mathfrak{w} (91)$$

Diese Gleichung ist ganz von der Form der Laplace-Poisson'schen Gleichung für das scalare Potential. Der einzige Unterschied zwischen beiden Fällen besteht nur darin, dass sich Gl. (32) auf scalare Grössen bezog, während in Gl. (91) gerichtete Grössen vorkommen. Dieser Unterschied hindert aber nicht, die früher für die Laplace'sche Gleichung gefundene Lösung auf den jetzt vorliegenden Fall zu übertragen.

Zerlegt man nämlich Gl. (91) in ihre Componenten nach den Richtungen der drei Coordinatenachsen, so erhält man, wenn man die Componenten in der üblichen Weise bezeichnet,

$$\nabla^2 A_1 = -w_1; \quad \nabla^2 A_2 = -w_2; \quad \nabla^2 A_3 = -w_3. \quad (92)$$

Die Componente A_1 des Vectorpotentials bildet demnach zugleich das scalare Potential für eine Quellenvertheilung von der Intensität w_1 und dieselbe Bemerkung gilt natürlich nicht nur für die beiden anderen Coordinatenaxen, sondern auch für jede beliebige Richtung im Raume, auf die wir die Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{w}$ projeciren.

Die eindeutige Lösung der Laplace'schen Gleichung mit der auch hier gültigen Bedingung, dass das Potential im Unendlichen verschwinden soll, war durch Gl. (29) gegeben und wir haben daher auch

$$A_1 = \frac{1}{4\pi} \int \frac{w_1 d\tau}{a} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (93)$$

In derselben Weise lassen sich auch A_2 und A_3 berechnen und das ganze $\mathfrak{A}$ setzt sich durch geometrische Summirung aus seinen Componenten zusammen. Dabei finden sich die Componenten von $\mathfrak{w}$ wieder zusammen und man erhält

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathfrak{w} d\tau}{a} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (94)$$

Aus dieser Ableitung geht nicht hervor, ob die damit gefundene Funktion $\mathfrak{A}$ zugleich die Bedingung $\text{div } \mathfrak{A} = 0$ erfüllt. Wir überzeugen uns davon nachträglich. Differentiirt man Gl. (93) nach x und beachtet man dabei, dass sich bei der Verrückung des Aufpunktes nur a verändert, so erhält man, nachdem noch die beiden anderen Glieder $\partial A_2 / \partial y$ und $\partial A_3 / \partial z$ zugefügt sind,

$$\text{div } \mathfrak{A} = \frac{1}{4\pi} \int \mathfrak{w} \cdot \nabla \frac{1}{a} d\tau \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (95)$$

Um dieses Integral zu berechnen, gehe ich von folgender Gleichung aus

$$\text{div} \left(\frac{1}{a} \cdot \mathfrak{w} \right) = \frac{1}{a} \text{div } \mathfrak{w} + \mathfrak{w} \cdot \nabla \frac{1}{a}, \cdot \cdot \cdot \quad (96)$$

die eine blosse Identität bildet, wovon man sich durch Entwickeln der einzelnen Glieder überzeugt (siehe Maxw. Theorie Gl. (78), S. 61). Bei der Bedeutung, die $\mathfrak{w}$ in unserem Falle

besitzt, verschwindet aber das erste Glied auf der rechten Seite (nach Gl. 70). Der vorher für $\text{div } \mathfrak{A}$ gefundene Werth lässt sich daher auch ersetzen durch

$$\text{div } \mathfrak{A} = \frac{1}{4\pi} \int^{\infty} \text{div} \left(\frac{1}{a} \cdot \mathfrak{w} \right) d\tau \dots \dots \dots (97)$$

Die Funktion $\frac{1}{a} \mathfrak{w}$ erstreckt sich aber nicht ins Unendliche, da schon $\mathfrak{w}$ nicht ins Unendliche reichte. Das über den ganzen unendlichen Raum ausgedehnte Integral liefert daher, wie schon in Gl. (7) gefunden war, den Werth Null. Hiermit ist der verlangte Nachweis geliefert und Gl. (94) bildet demnach in der That die eindeutige Lösung der Gl. (84) mit den dieser Lösung auferlegten Nebenbedingungen.

Schliesslich möchte ich noch darauf hinweisen, dass die Uebereinstimmung zwischen den Laplace'schen Gleichungen für das scalare und das Vectorpotential von Neuem den engen Zusammenhang zwischen Quellen und Wirbeln bestätigt. Es entsprechen sich gegenseitig

im wirbelfreien Felde	im quellenfreien Felde
Quelle q	Wirbel $\mathfrak{w}$
Scalars Potential V	Vectorpotential $\mathfrak{A}$
Operation ∇ oder div	Operation curl
Operation $-\nabla^2$	Operation curl^2
Gl. (32)	Gl. (91)
Gl. (29)	Gl. (94)

§ 25. Zusammenhang zwischen den Funktionen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$.

Es ist nützlich, sich noch einmal genau den gegenseitigen Zusammenhang klar zu machen, in dem die drei Funktionen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ zu einander stehen. Zu diesem Zwecke gebe ich die folgende Zusammenstellung:

In der Reihe

$\mathfrak{A}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}$

ist jede vorausgehende Grösse das Wirbelintegral der darauf folgenden oder umgekehrt jede folgende wird durch die Raumdifferentiation curl aus der vorhergehenden abgeleitet, also

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{v} &= \text{curl } \mathfrak{A}; & \mathfrak{w} &= \text{curl } \mathfrak{v} = \text{curl}^2 \mathfrak{A} \\ \mathfrak{v} &= \text{WJ } \mathfrak{w}; & \mathfrak{A} &= \text{WJ } \mathfrak{v} = \text{WJ}^2 \mathfrak{w} \end{aligned} \right\} \quad (98)$$

Für die letzte Formel schreibt man auch wohl

$$\mathfrak{A} = \text{pot } \mathfrak{w}, \quad (99)$$

so dass das Operationszeichen pot mit WJ^2 identisch ist.

Natürlich kann man sich auch die Reihe der Funktionen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ in derselben Weise beliebig nach oben oder unten hin fortgesetzt denken. Zwischen jeder Gruppe von drei aufeinander folgenden Gliedern in dieser ganzen Reihe bestehen dann die durch die Gleichungen (98) ausgesprochenen Beziehungen. Dazu kommt dann noch Gl. (94), durch die man in den Stand gesetzt ist, die Operation WJ^2 oder pot wirklich auszuführen.

Um also z. B. das in der ganzen Reihe dem Gliede $\mathfrak{A}$ unmittelbar vorausgehende Glied zu finden, das mit $\mathfrak{x}$ bezeichnet werden möge, setze man

$$\mathfrak{x} = \text{pot } \mathfrak{v} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathfrak{v} d\tau}{a} \quad (100)$$

und dann ist

$$\mathfrak{A} = \text{curl } \mathfrak{x}; \quad \mathfrak{v} = \text{curl } \mathfrak{A} = \text{curl}^2 \mathfrak{x}; \quad \mathfrak{w} = \text{curl } \mathfrak{v} = \text{curl}^3 \mathfrak{x} \quad (101)$$

und ebenso

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{v} &= \text{WJ } \mathfrak{w}; & \mathfrak{A} &= \text{WJ } \mathfrak{v} = \text{WJ}^2 \mathfrak{w} = \text{pot } \mathfrak{w}; & \mathfrak{x} &= \text{WJ } \mathfrak{A} = \\ \text{WJ}^2 \mathfrak{v} &= \text{pot } \mathfrak{v} = \text{WJ}^3 \mathfrak{w} = \text{WJ pot } \mathfrak{w} = \text{pot WJ } \mathfrak{w}. \end{aligned} \right\} \quad (102)$$

Aus dieser Zusammenstellung geht noch eine wichtige Beziehung zwischen den Gliedern der Reihe hervor. Man kann nämlich, wenn $\mathfrak{v}$ gegeben ist, das zugehörige Wirbelintegral $\mathfrak{A}$ auf zwei verschiedene Arten ableiten. Entweder nimmt man zuerst von $\mathfrak{v}$ den curl und sucht zu dem hierdurch gefundenen $\mathfrak{w}$ das Potential nach Gl. (94). An Stelle dieses bisher allein besprochenen Verfahrens kann man aber auch umgekehrt

zuerst von $\mathfrak{v}$ das Potential $\mathfrak{x}$ bilden und daraus mit Hülfe der Operation curl die gesuchte Funktion $\mathfrak{A}$ ableiten. Man hat also

$$\mathfrak{A} = \text{WJ } \mathfrak{v} = \text{pot curl } \mathfrak{v} = \text{curl pot } \mathfrak{v}. \quad (103)$$

Die Operationszeichen curl und pot können also, wenn es sich nur um quellenfreie Felder handelt, in der Reihenfolge mit einander vertauscht werden und beide nacheinander ausgeführt ergeben das Wirbelintegral WJ.

Uebrigens können alle diese Betrachtungen auch auf das scalare Potential V , das zu ihm gehörige Vectorfeld $\mathfrak{v}$ und das Quellensystem q übertragen werden. Wir können auch die Reihe $V, \mathfrak{v}, q$ nach oben und unten hin um beliebig viele Glieder vermehren, von denen jedes folgende aus dem vorausgehenden durch eine Raumdifferentiation, und zwar hier abwechselnd durch div und $-\nabla$, abgeleitet werden kann. Diese Art der Differentiation bringt es mit sich, dass die Glieder der Reihe abwechselnd gerichtete und richtungslose Grössen sind. Setzte man z. B. vorn und hinten noch je ein Glied an, die dann beide Vektoren sein müssen und ausserdem als wirbelfrei vorauszusetzen sind, so würde die Reihe etwa lauten

$$\mathfrak{M}, V, \mathfrak{v}, q, \mathfrak{p}.$$

Man hat dann zunächst

$$V = \text{div } \mathfrak{M}; \quad \mathfrak{v} = -\nabla V = -\nabla \text{div } \mathfrak{M} = -\nabla^2 \mathfrak{M}. \quad (104)$$

Bei der letzten Umformung war auf die Identität Gl. (89) und die Bedingung, dass $\text{curl } \mathfrak{M} = 0$ sein soll, zu achten. Aus der letzten Gleichung folgt aber, dass der Begriff des Vectorpotentials — oder genauer gesagt der Begriff eines gerichteten Potentials im Allgemeinen — auch auf die Behandlung wirbelfreier Felder übertragen werden kann. Aus Gl. (104) erhält man nämlich

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathfrak{v} d\tau}{a}. \quad (105)$$

Wir wissen schon, dass

$$q = \text{div } \mathfrak{v} = -\text{div } \nabla V = -\nabla^2 V$$

gesetzt werden kann; zu einer neuen Beziehung gelangen wir dagegen, wenn wir noch das Glied $\mathfrak{p}$ unserer Reihe ins Auge fassen. Wir haben

$$\mathfrak{p} = -\nabla q = -\nabla \operatorname{div} \mathfrak{v} = -\nabla^2 \mathfrak{v}, \quad . \quad . \quad (105)$$

wobei wieder die Bedingung wesentlich war, dass $\mathfrak{v}$ wirbelfrei sein sollte. Aus der letzten Gleichung erhält man die Lösung

$$\mathfrak{v} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathfrak{p} d\tau}{a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (107)$$

und damit ist in der That noch eine zweite Methode neben der gewöhnlich benutzten gegeben, um die Feldgrösse $\mathfrak{v}$ zu berechnen, wenn die Quellen q gegeben sind. Man braucht dazu nur das Gefällfeld $\mathfrak{p} = -\nabla q$ der Quellenintensität q zu construiren und daraus nach den gewöhnlichen Rechenvorschriften das Potential zu bilden.

Diese Erörterungen lassen sich auch noch zu einer Gleichung zusammenfassen, die ein Gegenstück zu Gl. (103) bildet, nämlich zu

$$\operatorname{pot} \nabla q = \nabla \operatorname{pot} q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (108)$$

die für jede scalare Funktion q eines Radiusvectors erfüllt ist.

§ 26. Lösung der Hauptaufgabe mit Hülfe des Vectorpotentials.

Als Fundamentalaufgabe der Geometrie der Wirbelfelder haben wir es früher hingestellt, das Feld $\mathfrak{v}$ zu finden, das zu einer gegebenen Wirbelvertheilung $\mathfrak{w}$ gehört. Die Funktion $\mathfrak{w}$ ist aber nothwendig quellenfrei und die Lösung der Hauptaufgabe ist daher in den vorausgehenden Erörterungen bereits enthalten. In der That handelt es sich nur darum, die Wirbel-Integration

$$\mathfrak{v} = \mathbf{WJ} \mathfrak{w} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (109)$$

an der gegebenen quellenfreien Funktion $\mathfrak{w}$ auszuführen. Nach Gl. (103) kann das stets auf zwei verschiedenen, aber zum selben Ziele führenden Wegen geschehen.

Gewöhnlich bildet man zuerst das Vectorpotential $\mathfrak{A}$ nach

der in Gl. (94) gegebenen Rechenvorschrift und findet daraus $\mathfrak{v} = \text{curl } \mathfrak{A}$, womit die Aufgabe gelöst ist. Man kann aber auch umgekehrt zuerst eine Hilfsgrösse $\mathfrak{z}$ ableiten, indem man

$$\mathfrak{z} = \text{curl } \mathfrak{w} (110)$$

setzt, und daraus $\mathfrak{v}$ in der Form eines Vectorpotentials, nämlich

$$\mathfrak{v} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathfrak{z} d\tau}{a} (111)$$

erhalten. Natürlich ist hiermit die Aufgabe nicht nur für den Fall eines einzigen Wirbelfadens, sondern gleich ganz allgemein für jedes beliebige Wirbelsystem gelöst und darin zeigt sich sofort, wie sehr diese Methode der im vorigen Capitel besprochenen überlegen ist.

Für einen einzelnen Wirbelfaden vereinfachen sich indessen auch hier die Gleichungen entsprechend. Für das Vectorpotential $\mathfrak{A}$ erhält man, wenn die Wirbelstärke wie früher mit W und ein Längenelement der Leitlinie des Wirbelfadens mit $d\mathfrak{s}$ bezeichnet werden,

$$\mathfrak{A} = \frac{W}{4\pi} \int \frac{d\mathfrak{s}}{a} (112)$$

Daraus gehen auch die Formeln des vorigen Capitels wieder ohne Weiteres hervor. Die Operation curl , die an dem letzten Ausdrucke vorgenommen werden muss, um $\mathfrak{v}$ zu erhalten, bezieht sich darauf, dass nur der Ort des Aufpunktes veränderlich ist. Von der Lage des Aufpunktes ist in Gl. (112) aber nur der Abstand a abhängig und jedes Element des Integrals liefert unabhängig von den anderen einen Beitrag zu $\text{curl } \mathfrak{A}$. Da nun identisch und allgemein

$$\text{curl} \left(\frac{1}{a} d\mathfrak{s} \right) = \frac{1}{a} \text{curl } d\mathfrak{s} + V \left(\nabla \frac{1}{a} \right) d\mathfrak{s} . . . (113)$$

wovon man sich durch Ausrechnen leicht überzeugt (siehe Maxw. Theorie, Gl. (80)), während $d\mathfrak{s}$ hier constant, $\text{curl } d\mathfrak{s}$ also Null ist, erhält man

$$\mathfrak{v} = \text{curl } \mathfrak{A} = \frac{W}{4\pi} \int V \left(\nabla \frac{1}{a} \right) d\mathfrak{s}, . . . (114)$$

was nach Ausführung der Operation ∇ an $\frac{1}{a}$ sofort wieder Gl. (82) liefert.

Auch auf dem zweiten vorher besprochenen Wege kann diese Formel abgeleitet werden. Freilich eignet sich das zweite Verfahren weniger zur Anwendung auf isolirte Wirbelfäden, da es hier etwas umständlichere Rechnungen erfordert. Ich begnüge mich damit, die Lösung in allgemeinen Umrissen anzugeben.

Zunächst ist das Feld $\mathfrak{z}$, d. h. der von dem gegebenen Wirbelfaden genommene Wirbel ins Auge zu fassen. Das Feld $\mathfrak{z}$ ist ganz in dem vom Wirbelfaden selbst eingenommenen Raume enthalten. Die Stromlinien $\mathfrak{z}$ umkreisen die Leitlinie dieses Fadens; ausserhalb des Fadens ist $\mathfrak{z}$ überall Null, ebenso wie $\mathfrak{w}$ selbst. Am einfachsten denkt man sich — da man hierüber willkürlich verfügen darf — den Wirbel W über den Querschnitt des Fadens bis nahe an den Rand gleichförmig vertheilt. Dann concentrirt sich $\mathfrak{z}$ auf der Oberfläche des Fadens und steht dort senkrecht zur Längsrichtung. Durch das Element $d\mathfrak{s}$ der Leitlinie des Wirbelfadens ziehe ich eine Halbebene in beliebiger Richtung und berechne, wie gross der zu $d\mathfrak{s}$ gehörige Fluss von $\mathfrak{z}$ ist, von dem die Halbebene durchschnitten wird. Nach dem Stokes'schen Satze findet man dafür den Betrag $\mathfrak{w} d\mathfrak{s}$. Nach dieser Vorbereitung führe ich die in Gl. (111) vorgeschriebene Integration zunächst über den Raum des zu $d\mathfrak{s}$ gehörigen Wirbelfadenelementes aus. Wird ein (von der zweiten Ordnung unendlich kleines) Element des Querschnittsumfangs mit $d\mathfrak{s}'$ bezeichnet, so erhält man für dieses Integral

$$\frac{\mathfrak{w} d\mathfrak{s}}{4\pi} \int \frac{d\mathfrak{s}'}{a},$$

wobei die Integration über den ganzen Querschnittsumfang zu erstrecken ist.

Nach einer Erweiterung des Stokes'schen Satzes, wegen der ich hier auf mein früheres Buch, § 31 verweisen muss, kann aber das Linienintegral eines Scalars über eine geschlossene Curve stets durch ein Oberflächenintegral über die von

der Curve eingeschlossene Fläche ersetzt werden. Man hat nach diesem Satze stets

$$\int \frac{1}{a} d\mathfrak{s}' = \int V \mathfrak{N} \nabla \frac{1}{a} df. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (115)$$

Die hier vorkommende Einheitsnormale $\mathfrak{N}$ zum Wirbelfadenquerschnitt, dessen Element mit df bezeichnet ist, fällt in die Richtung der Leitlinie, abgesehen also vom Vorzeichen, dessen Discussion hier übergangen werden kann, in die Richtung von $d\mathfrak{s}$. Ferner kann $\mathfrak{N} \nabla \frac{1}{a}$ für den ganzen Querschnitt als constant angesehen werden, da die Fläche f selbst unendlich klein und $\mathfrak{N}$ constant ist. Berücksichtigt man dies, so kann der von dem Wirbelfadenelemente zu dem Integrale (111) gelieferte Betrag auch gleich

$$\frac{w\mathfrak{N}}{4\pi} f V d\mathfrak{s} \nabla \frac{1}{a} \quad \text{oder gleich} \quad \frac{W}{4\pi} V d\mathfrak{s} \nabla \frac{1}{a}$$

gesetzt werden, womit man (von dem unbestimmt gelassenen Vorzeichen abgesehen) bei Ausführung der Integration nach $d\mathfrak{s}$ wieder auf Gl. (114) geführt wird.

§ 27. Fluss zwischen zwei Wirbelfäden.

Vorläufig sei im Felde nur ein Wirbelfaden gegeben, den ich mit dem Zeiger 1 bezeichne; ausserdem soll noch eine in sich zurückkehrende Linie gezogen sein, auf die sich der Zeiger 2 bezieht. Man soll den Fluss F_{12} berechnen, den der Wirbelfaden 1 durch die Linie 2 sendet, oder der, wie man auch sagen kann, von der Linie 2 umkettet wird. Dieser Fluss wird durch ein Oberflächenintegral über eine sonst beliebig gezogene Fläche dargestellt, deren Randcurve die Linie 2 ist, und die Bezeichnung stammt daher, dass bei der hydrodynamischen Construction der Vectorfunktion das Oberflächenintegral durch das Flüssigkeitsvolumen gemessen wird, von dem die Fläche in der Zeiteinheit durchströmt wird. Als Definitionsgleichung für den Fluss F_{12} hat man daher

$$F_{12} = \int v \mathfrak{N} df \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (116)$$

mit der ausdrücklichen Festsetzung, dass $\mathfrak{v}$ das von dem Wirbelfaden 1 erzeugte Feld bedeutet und dass die Integration über eine vom Rande 2 begrenzte Fläche auszudehnen ist.

Beachtet man, dass $\mathfrak{v} = \text{curl } \mathfrak{A}$ gesetzt werden kann, so erhält man durch Anwendung des Stokes'schen Satzes aus Gl. (116) auch

$$F_{12} = \int \mathfrak{A} d\mathfrak{s}_2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (117)$$

worin $d\mathfrak{s}_2$ ein Linienelement der Curve 2 bedeutet, über die die Integration zu erstrecken ist.

Für $\mathfrak{A}$ endlich kann der in Gl. (112) festgesetzte Werth eingesetzt werden, woraus

$$F_{12} = \frac{W}{4\pi} \iint \frac{d\mathfrak{s}_1 d\mathfrak{s}_2}{a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (118)$$

folgt. Das in dieser Gleichung auftretende Doppelintegral hängt nur noch von der Gestalt und der gegenseitigen Lage der beiden Linien 1 und 2 ab. Es hat schon in der älteren Elektrizitätslehre eine wichtige Rolle gespielt und wird in diesem Zusammenhange als der Coefficient der gegenseitigen Induction der Linien 1 und 2 bezeichnet. Setzen wir zur Abkürzung

$$L_{12} = \iint \frac{d\mathfrak{s}_1 d\mathfrak{s}_2}{a}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (119)$$

so folgt, da die Reihenfolge der beiden Integrationen vertauscht werden kann,

$$L_{21} = L_{12}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (120)$$

d. h. wenn die Linie 2 einen Wirbelfaden von derselben Stärke trägt, wie vorher Linie 1, so umkettet jetzt Linie 1 einen ebensogrossen Fluss als Linie 2 im vorigen Falle.

Man kann die beiden Linien 1 und 2 auch zusammenfallen lassen. Das Doppelintegral (119) wird dann logarithmisch unendlich, ebenso also auch der Fluss F , der von der eigenen Wirbellinie umkettet wird, falls W einen endlichen Werth hat. Der Grund dafür ist leicht einzusehen. Bei einem endlichen Werthe des Wirbels W , der sich auf einer Linie concentrirt, wird $\mathfrak{v}$ in der unmittelbaren Nachbarschaft der

Linie unendlich gross. Man kann daher den Selbstinductionscoefficienten eines Wirbelfadens nur berechnen, wenn die Vertheilung von $\mathfrak{w}$ über den Querschnitt des Fadens gegeben ist. Zu dem Flusse, der von einem Wirbelfaden erzeugt und zugleich von ihm selbst umkettet wird, trägt die nächste Nachbarschaft des Fadens am meisten bei und es ist daher in solchen Fällen nicht zulässig, sich den ganzen Wirbel auf der Leitlinie concentrirt zu denken.

§ 28. Inductionscoefficient zwischen zwei conaxialen Kreisen.

Ich habe es bisher vermieden, in dieser Schrift, die mehr der Erörterung grundsätzlicher Fragen gewidmet ist, umfäng-

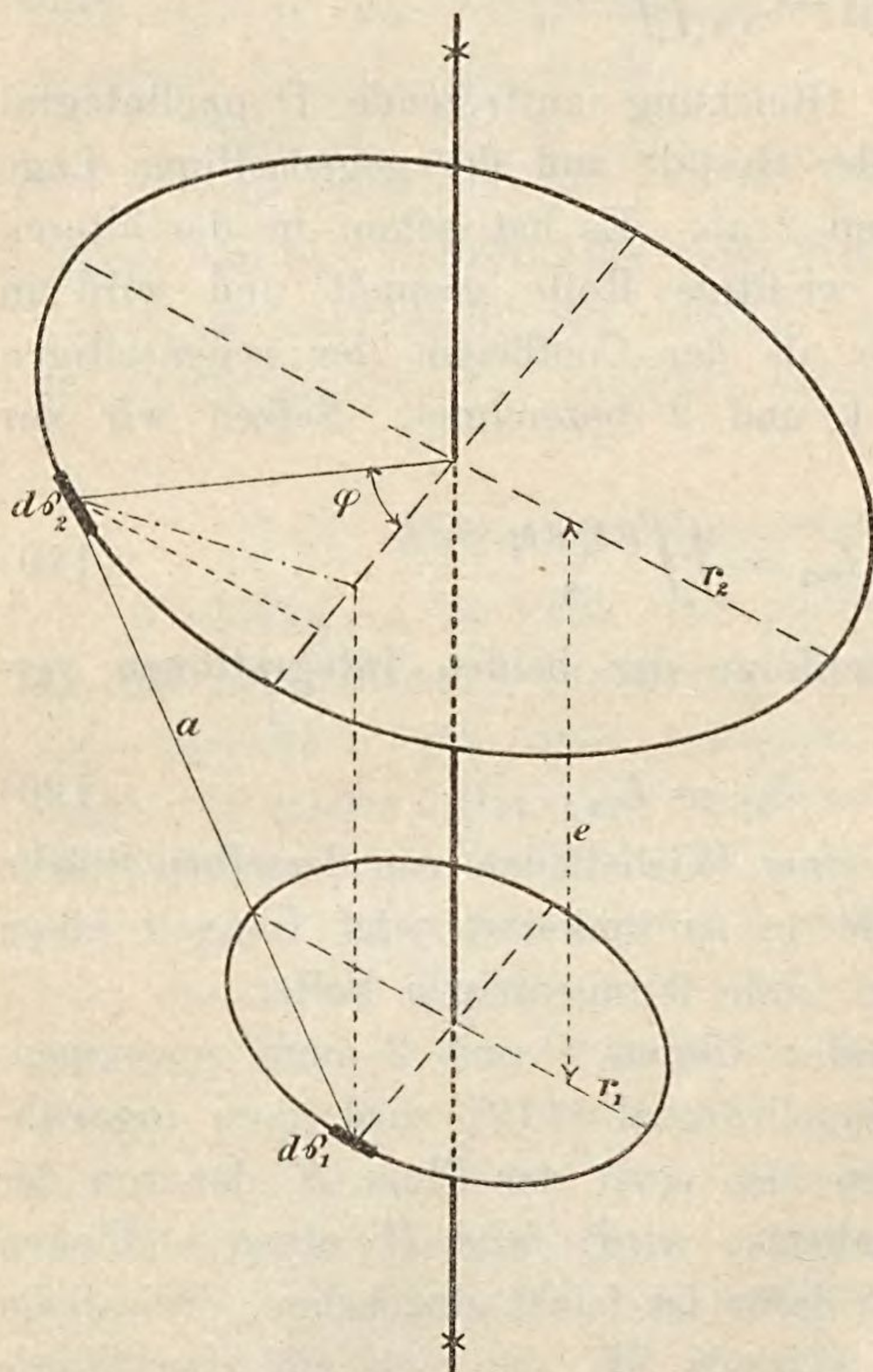
liche Ausrechnungen vorzunehmen oder überhaupt auf Einzelheiten ausführlicher einzugehen. Wegen der erheblichen praktischen Bedeutung des Inductionscoefficienten zwischen zwei conaxialen Kreisen soll aber mit ihm eine Ausnahme gemacht werden.

Mit Rücksicht auf die in die beistehende Abbild. eingeschriebenen Bezeichnungen ist

$$d\mathfrak{s}_1 d\mathfrak{s}_2 = ds_1 ds_2 \cos \varphi.$$

Ich erstrecke das Integral (119) zunächst über den oberen Kreis. Man hat

$$a = \sqrt{e^2 + (r_2 \sin \varphi)^2 + (r_2 \cos \varphi - r_1)^2} = \sqrt{c^2 - 2r_1 r_2 \cos \varphi},$$



wenn zur Abkürzung $c^2 = e^2 + r_1^2 + r_2^2$ gesetzt wird. Da ferner $ds_2 = r_2 d\varphi$ ist, erhält man

$$\int \frac{\cos \varphi ds_2}{a} = 2r_2 \int_0^\pi \frac{\cos \varphi d\varphi}{\sqrt{c^2 - 2r_1 r_2 \cos \varphi}}.$$

Dieses Integral ist ein elliptisches. Um es auf die Legendre'schen Normalformen zurückzuführen, setze man

$$\varepsilon^2 = \frac{2r_1 r_2}{c^2}.$$

Die hierdurch bestimmte Grösse ε ist immer ein echter Bruch, denn wenn man den Zähler vom Nenner subtrahirt, bleibt immer ein positiver Rest. Das ganze L_{12} lässt sich jetzt in der Form

$$L_{12} = \frac{4\pi r_1 r_2}{c} \int_0^\pi \frac{\cos \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos \varphi}} \quad . \quad . \quad . \quad (121)$$

anschreiben, da die Integration nach ds_1 einfach durch eine Multiplikation mit dem Umfange des Kreises 1 ausgeführt wird. Denn aus der Symmetrie um die gemeinsame Axe herum erkennt man, dass jedes Element ds_1 den gleichen Beitrag zu L_{12} liefert.

Durch die Substitution

$$\varphi = \pi - 2\psi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (122)$$

geht Gl. (121) über in

$$L_{12} = \frac{4\pi r_1 r_2}{c\sqrt{1 + \varepsilon^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\sin^2 \psi - 2}{\sqrt{1 - \frac{2\varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2} \sin^2 \psi}} d\psi \quad . \quad . \quad (123)$$

und dieser Ausdruck lässt sich weiter in die Summe aus einem vollständigen elliptischen Integrale erster und einem zweiter Gattung zerlegen, so dass man schliesslich erhält

$$L_{12} = \frac{8\pi r_1 r_2}{c\varepsilon^2\sqrt{1 + \varepsilon^2}} \left[F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) - (1 + \varepsilon^2) E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \right] \quad (124)$$

wobei zur Abkürzung noch

$$k = \sqrt{\frac{2\varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2}} = 2 \sqrt{\frac{r_1 r_2}{e^2 + (r_1 + r_2)^2}} \quad . \quad . \quad (125)$$

gesetzt ist. Auch k ist immer ein echter Bruch und L_{12} kann daher stets ohne Weiteres mit Hülfe der Legendre'schen Tabellen nach Gl. (124) gefunden werden.

Diese Entwicklung gestattet auch, den Selbstinductionscoefficienten eines kreisförmigen Wirbelfadens bei geeigneten näheren Festsetzungen zu berechnen. Der Querschnitt des Wirbelfadens, über den der Wirbel W gleichförmig vertheilt angenommen werden soll, sei ein Kreis vom Radius ϱ , der sehr klein gegen den Radius r der Leitlinie des Wirbelfadens gedacht sein möge. Es wird verlangt, den ganzen vom Wirbelfaden erzeugten Fluss F , der von der Leitlinie des Fadens umkettet wird, zu berechnen.

Zu diesem Zwecke ziehe ich einen zu der Leitlinie concentrischen Kreis, dessen Radius um δ kleiner ist als r . Dabei soll δ klein gegen r und gross gegen ϱ , im Uebrigen aber beliebig gewählt sein. Wir berechnen zuerst den Fluss, der durch die Fläche dieses Hilfskreises geht. Zu diesem Zwecke setzen wir in der vorausgehenden Entwicklung

$$e = 0; \quad r_1 = r; \quad r_2 = r - \delta; \quad \varepsilon = 1 - \frac{\delta^2}{2r^2}; \quad k = 1 - \frac{\delta^2}{4r^2},$$

wobei kleine Grössen höherer Ordnung vernachlässigt sind. Der Modul k der in Gl. (124) vorkommenden elliptischen Integrale unterscheidet sich von der Einheit nur um eine von der zweiten Ordnung kleine Grösse. Nach bekannten Reihenentwicklungen*) kann man

$$F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \lg \frac{8r}{\delta} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left[\lg \frac{8r}{\delta} - 1 \right] \frac{\delta^2}{4r^2} + \dots$$

$$E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = 1 + \frac{1}{2} \left[\lg \frac{8r}{\delta} - \frac{1}{1.2} \right] \frac{\delta^2}{4r^2} + \dots$$

setzen. Schon das zweite Glied in diesen Entwicklungen kann indessen hier, wegen der über die Grösse des Verhältnisses

*) Vgl. Schlömilch, Compendium der höheren Analysis. 2. Band, 3. Aufl. S. 322. Braunschweig 1879.

δ/r gemachten Voraussetzung unterdrückt werden. Man findet daher

$$L_{12} = 4\pi r \left(\lg \frac{8r}{\delta} - 2 \right)$$

und der durch die Fläche des Hilfskreises gehende Fluss ist demnach

$$F_{12} = Wr \left(\lg \frac{8r}{\delta} - 2 \right).$$

Durch die zwischen dem Hilfskreise und dem Rande des Wirbelfadens liegende ringförmige Fläche von der Breite $\delta - \varrho$ geht ferner ein Fluss, der sich leicht bestimmen lässt. In der Nachbarschaft des Wirbelfadens können nämlich die Stromlinien genau genug als Kreise angesehen werden, deren Mittelpunkte auf der Leitlinie liegen. Der Absolutbetrag v der Geschwindigkeit im Abstände x von der Leitlinie kann daher in dem uns jetzt interessirenden Streifen

$$v = \frac{W}{2\pi x}$$

gesetzt und daraus der Fluss durch den Streifen gleich

$$2\pi r \int_{\varrho}^{\delta} v dx = Wr \lg \frac{\delta}{\varrho}.$$

gefunden werden. Es bleibt noch der Fluss übrig, der im Innern des Wirbelfadens selbst verläuft. Wir erhalten auf ähnliche Art hier

$$v = \frac{Wx}{2\pi \varrho^2}$$

und den Fluss gleich

$$2\pi r \int_0^{\varrho} v dx = \frac{Wr}{2}.$$

Fassen wir nun alle drei Glieder zusammen, so erhalten wir demnach für den gesammten Fluss F , der von der Leitlinie umkettet wird

$$F = Wr \left(\lg \frac{8r}{\varrho} - \frac{3}{2} \right). \quad . \quad . \quad . \quad (126)$$

Die vorher willkürlich gewählte Grösse δ ist aus der

Schlussformel verschwunden. Der Selbstinductionscoefficient folgt aus dieser Gleichung, indem man mit $\frac{W}{4\pi}$ dividirt, also

$$L = 4\pi r \left(\lg \frac{8r}{\rho} - \frac{3}{2} \right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (127)$$

§ 29. Verschiedene Deutungen des Vectorpotentials.

Das scalare Potential V wurde in § 5 als ein Linienintegral der Feldgrösse $\mathfrak{v}$ eingeführt und die grosse Bedeutung, die der Potentialbegriff in der Physik gewonnen hat, beruht besonders darauf, dass dieses Linienintegral eine Arbeitsleistung darstellt, wenn das Feld $\mathfrak{v}$ ein Kraftfeld ist. Nachdem wir inzwischen die nahe Verwandschaft des Vectorpotentials $\mathfrak{A}$ mit dem scalaren Potentiale V erkannt haben, können wir die Frage nicht umgehen, ob sich auch für $\mathfrak{A}$ ähnliche Deutungen finden lassen. Da bei dieser Untersuchung nicht viel herauszukommen scheint, werde ich mich aber nur ganz kurz dabei fassen.

Der Ursprung der ganzen Spaltung der Theorie der Vectorfunktionen in zwei neben einander herlaufende Theile, also das Gegenüberstehen von Quellen und Wirbeln, scalarem und Vectorpotential liegt in den beiden Arten der geometrischen Produktbildung. Da V mit Hülfe des inneren Produkts $\mathfrak{v} d\mathfrak{s}$ aus der Feldgrösse und dem Elemente des Integrationsweges erhalten wird, müssen wir von vornherein vermuthen, dass eine entsprechende Darstellung, die etwa für $\mathfrak{A}$ möglich sein sollte, nur mit Hülfe des äusseren Produkts gewonnen werden kann.

Am nächsten liegt es, ein Vectorlinienintegral von der Form

$$\mathfrak{A} = \int V \mathfrak{v} d\mathfrak{s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (128)$$

zu bilden und zu versuchen, ob sich $\mathfrak{A}$ oder die Differenz von $\mathfrak{A}$ zwischen den Endpunkten des Integrationsweges in dieser Weise darstellen lässt. Dazu müsste aber das Integral unabhängig vom Integrationswege sein, d. h. es müsste für jede geschlossene Curve verschwinden. Schon in § 32 meiner Maxw. Theorie habe ich nachgewiesen, dass dies (von dem trivialen Falle eines constanten Feldes abgesehen) niemals zutreffen kann.

Man kann daher zu eindeutigen Werthen von $\mathfrak{A}$ mit Hülfe eines Integrals von der Form (128) nur dann gelangen, wenn man eine bestimmte Auswahl unter den Integrationswegen trifft.

In der That kann man auch auf diese Art dem Ziele ziemlich nahe kommen. Man wähle nämlich im Felde eine beliebige constante Richtung aus und ziehe von jedem Punkte des Feldes, für den man das Vectorpotential bestimmen will, eine grade Linie in jener Richtung bis ins Unendliche. Das Vectorlinienintegral $\mathfrak{A}$ für diesen Integrationsweg (vom gegebenen Punkte bis ins Unendliche erstreckt) hat dann die immerhin ganz bemerkenswerthe Eigenschaft, dass sich die Feldgrösse $\mathfrak{u}$ durch die Operation curl daraus ableiten lässt. Der Beweis dafür ist leicht zu führen, soll aber hier übergangen werden.

Trotzdem ist aber der in dieser Weise definirte Werth $\mathfrak{A}$ nicht identisch mit dem Vectorpotentiale. Beide gehören zwar zu demselben Wirbelsysteme, aber $\mathfrak{A}$ ist nicht quellenfrei. Durch eine anderweitige Auswahl unter den Integrationswegen mag es vielleicht gelingen, $\text{div } \mathfrak{A}$ zu Null zu machen, so dass $\mathfrak{A}$ dann vollständig mit $\mathfrak{A}$ zusammenfällt.

Dem Begriffe der Arbeit, die durch ein inneres Produkt dargestellt wird, steht der Begriff des statischen Momentes gegenüber. In der That hat das Vectorpotential eines Kraftfeldes die Bedeutung und die Dimension eines statischen Momentes. Denkt man sich in jedem Punkt des vorher besprochenen Integrationsweges die zugehörige Feldgrösse $\mathfrak{u}$ in einem bestimmten Kräftemaassstabe abgetragen, so erfüllen alle diese Strecken eine gewisse Fläche, die als Momentenfläche aufgefasst den Werth des Integrals $\mathfrak{A}$ angibt. Wenn es gelungen ist, jedem Punkt einen Integrationsweg zuzuordnen, derart dass $\text{div } \mathfrak{A}$ verschwindet, kann daher auch $\mathfrak{A}$ sehr anschaulich durch diese Momentenflächen nach Grösse und Richtung dargestellt werden.

Viel Werth lege ich natürlich nicht auf diese Betrachtungen; sie sollen nur dazu dienen, den Begriff des Vectorpotentials, von dem man sich keine rechte Vorstellung machen

kann, so lange es nur als Stammgrösse des Feldes eingeführt ist, der Anschauung näher zu bringen und das geschieht immerhin schon, wenn man weiss, dass es ein statisches Moment vorstellt, im Gegensatze zu dem scalaren Potentiale, das eine Arbeitsleistung bedeutet. Ich erinnere mich nicht, selbst nur diese so überaus nahe liegende, einfache Bemerkung vorher jemals gelesen zu haben.

§ 30. **Andere Ableitung des Ausdruckes von Gauss für das scalare Potential eines Wirbelfadens.**

Eine kleine Bemerkung, die ich hier noch anfügen will, wird vielleicht von einigem Interesse sein. Wir fanden in Gl. (120), dass $L_{12} = L_{21}$ ist. Daraus kann das von einem einzelnen Wirbelfaden erzeugte Feld $\mathfrak{v}$ unter Benutzung der Untersuchungen in § 19 wie folgt berechnet werden.

Wir legen durch den Aufpunkt, für den $\mathfrak{v}$ bestimmt werden soll, in beliebiger Stellung eine unendlich kleine ebene Fläche vom Inhalte f . Man kennt offenbar $\mathfrak{v}$, wenn man für jede Stellung dieser Fläche anzugeben vermag, wie gross der Fluss ist, von dem f durchsetzt wird. Dieser Fluss ist aber nach dem angeführten Satze ebensogross als der Fluss, den ein Wirbelfaden von derselben Stärke W durch den gegebenen Wirbelfaden sendet, wenn die Leitlinie des neuen Fadens mit der Umrisslinie von f zusammenfällt. Um diesen Fluss zu berechnen, ersetzen wir den neuen Wirbelfaden durch eine Doppelbelegung $\pm \frac{Wf}{h}$. Der positive Theil dieser Belegung sendet durch den gegebenen Wirbelfaden den Fluss

$$\frac{Wf}{h} \frac{\bar{\omega}}{4\pi}$$

wenn mit $\bar{\omega}$ wieder der räumliche Winkel bezeichnet wird, unter dem der gegebene Wirbelfaden vom Aufpunkte aus erblickt wird. Dazu kommt der von der negativen Belegung herrührende Fluss. Fasst man beide zusammen, so erhält man

$$- \frac{Wf}{h} \cdot \frac{1}{4\pi} \frac{d\bar{\omega}}{dh} h \quad \text{oder} \quad - f \frac{d}{dh} \left(\frac{W\bar{\omega}}{4\pi} \right).$$

Die in die Richtung von h fallende Componente von $\mathfrak{v}$ ist daher gleich dem negativen Differentialquotienten von $\frac{W\varpi}{4\pi}$ nach h , d. h. $\mathfrak{v}$ kann überall ausserhalb des gegebenen Wirbelfadens von dem Potentiale

$$V = \frac{W\varpi}{4\pi}$$

abgeleitet werden, was zu beweisen war. Als ein Vorzug dieser Ableitung ist es vielleicht zu betrachten, dass sich die Einführung des körperlichen Winkels ϖ bei ihr ganz ungezwungen ergibt.

Fünftes Capitel.

Beliebige Funktionen. Raumsummen.

§ 31. Beliebige Vectorfunktionen.

Bisher war immer nur entweder von wirbelfreien oder von quellenfreien Vectorfunktionen die Rede. Es bleibt noch der Nachweis übrig, dass sich jede beliebige Vectorfunktion, von der nur vorausgesetzt wird, dass sie stetig ist und sich nicht ins Unendliche erstreckt, auf diese beiden Formen zurückführen lässt.

Wenn $\mathfrak{v} = f(\mathfrak{r})$ beliebig gegeben ist, bilde man zunächst die Funktionen $q = \operatorname{div} \mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w} = \operatorname{curl} \mathfrak{v}$, von denen die erste das zu $\mathfrak{v}$ gehörige Quellensystem und die zweite das zugehörige Wirbelsystem angeben. Sind q und $\mathfrak{w}$ gegeben, so ist dadurch umgekehrt auch $\mathfrak{v}$ eindeutig bestimmt, weil die geometrische Differenz von zwei Lösungen, die etwa angegeben werden könnten, im ganzen Raume zugleich wirbelfrei und quellenfrei sein und daher, nach einer schon oft gebrauchten Schlussweise, nothwendig verschwinden müsste.

Man hat also nur nöthig, nach den Vorschriften der früheren Capitel das zu q gehörige wirbelfreie Feld $\mathfrak{v}_1$ und zu $\mathfrak{w}$ das quellenfreie Feld $\mathfrak{v}_2$ zu bilden; dann ist nothwendig

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$$

gleich der ursprünglich vorgelegten Funktion und damit ist der Beweis geliefert, dass jede beliebige Funktion in eindeutiger Weise in einen wirbelfreien und einen quellenfreien Bestandtheil zerlegt werden kann. Man hat nun die beiden Theile in der Hand und kann auf sie die früher entwickelten Gesetze anwenden. Nach einem Bande zwischen beiden braucht man nicht zu suchen, da beide im Allgemeinen ganz unabhängig von einander sein können. Besteht in einem besonderen Falle eine Beziehung zwischen beiden, so wird dadurch die Funktion näher bestimmt; sie hört auf, ganz willkürlich zu sein.

Man könnte z. B. die Eigenschaften solcher Funktionen untersuchen, bei denen beide Componenten überall entweder gleich oder senkrecht zu einander gerichtet sind oder bei denen die eine Componente eine lineare Vectorfunktion der anderen ist u. s. f. Es mag sein, dass man auf diesem Wege zu manchen interessanten Ergebnissen gelangen kann; für die physikalische Anwendung der Theorie würde aber dabei schwerlich ein besonderer Gewinn herauskommen.

Von mehr Interesse ist die Untersuchung solcher Funktionen, die neben dem Vector noch eine scalare unabhängige Veränderliche enthalten. Man setze also etwa

$$\mathbf{v} = f(\mathbf{r}, t). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (129)$$

Bedeutet die scalare Veränderliche t z. B. die Zeit, so wird durch diese Gleichung ein in stetiger Veränderung begriffenes Feld dargestellt, während sich die einfachere Gleichung $\mathbf{v} = f(\mathbf{r})$ auf stationäre Felder bezog. Das totale Differential $\delta \mathbf{v}$, das man erhält, wenn man $\mathbf{r}$ und t um $\delta \mathbf{r}$ und δt wachsen lässt, kann dann (vgl. Gl. 59)

$$\delta \mathbf{v} = \frac{1}{2} \nabla \mathbf{v} \delta \mathbf{r} + \frac{1}{2} \mathbf{V} \mathbf{v} \delta \mathbf{r} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot \delta t \quad . \quad . \quad (130)$$

gesetzt werden.

Im Allgemeinen sind in dieser Gleichung die Zuwüchse $\delta \mathbf{r}$ und δt ganz unabhängig von einander. In besonderen

Fällen, namentlich bei hydrodynamischen Untersuchungen, ist es oft nöthig, δu dadurch näher zu bestimmen, dass man

$$\delta \mathbf{r} = \mathbf{v} \delta t. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (131)$$

setzt. Das kommt darauf hinaus, dass man die Schicksale eines bestimmt bezeichneten materiellen Theilchens während der Bewegung verfolgt. Den Quotienten aus $\delta \mathbf{u}$ und δt bezeichnet man dann als den totalen Differentialquotienten von $\mathbf{u}$ nach t und Gl. (30) geht über in

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{2} \nabla v^2 + \frac{1}{2} V \mathbf{w} v + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}. \quad . \quad . \quad . \quad (132)$$

In der Hydrodynamik wird diese Gleichung dazu benutzt, die Abhängigkeit der Feldgrösse $\mathfrak{v}$ von t , also den partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t}$, auf den es im Grunde genommen allein ankommt, in den auf die Flüssigkeit wirkenden Kräften auszudrücken. Bezeichnet p den Druck, $\mathfrak{P}$ die an der Volumeneinheit wirkende äussere Kraft (gewöhnlich die Schwere), von der wir voraussetzen wollen, dass sie von einem Potentiale P abgeleitet werden kann und μ die spezifische Masse, so ist nach dem dynamischen Grundgesetze, also nach einem Erfahrungssatze, der sich hier mit den funktionentheoretischen Untersuchungen vermischt, für die reibungsfreie Flüssigkeit

$$\mu \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \mathfrak{P} = -\nabla(p + P)$$

und aus Gl. (132) erhält man

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = - \nabla \frac{p + P + L}{\mu} - \frac{1}{2} V \mathbf{w} \mathbf{v}, \quad . \quad . \quad . \quad (133)$$

worin die lebendige Kraft der Volumeneinheit mit L bezeichnet ist.

Aehnlich ist das Verfahren, den Ablauf eines physikalischen Vorganges zu untersuchen in allen Fällen. Man sucht stets unter Zugrundelegung von Erfahrungsthatssachen oder von Hypothesen eine Differentialgleichung nach Art der Gl. (133) herzustellen, durch die der partielle Differentialquotient der Feldgrösse $\mathfrak{u}$ nach der Zeit von den augenblicklich geltenden Feldwerthen abhängig gemacht wird.

Oft und namentlich auch in der Hydrodynamik gelangt man bei solchen Betrachtungen zu einfachen und sehr bemerkenswerthen Ergebnissen, wenn man nicht die Veränderung von $\mathbf{v}$, sondern die des Wirbels $\mathbf{w}$ untersucht, wie es von Helmholtz geschehen ist. Aus Gl. (133) folgt

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} = -\frac{1}{2} \text{curl} \cdot \nabla \mathbf{w} \mathbf{v} \quad . \quad . \quad . \quad (134)$$

und dieser Ausdruck kann nach den Formeln der Vectoranalysis leicht noch weiter umgeformt werden. Einfacher ist es aber, zur Ableitung der berühmten Helmholtz'schen Sätze, die Veränderung zu berechnen, die das Oberflächenintegral

$$\int \mathbf{w} \mathfrak{N} df$$

erstreckt über eine veränderliche Fläche, die stets durch dieselben materiellen Theilchen der Flüssigkeit geht, mit der Zeit erfährt. Nach dem Stokes'schen Satze hat man dafür

$$\frac{d}{dt} \int \mathbf{v} d\mathfrak{s} = \int \frac{d\mathbf{v}}{dt} d\mathfrak{s} + \int \mathbf{v} \cdot (d\mathfrak{s} \nabla) \mathbf{v} = \int \frac{d\mathbf{v}}{dt} d\mathfrak{s} + \frac{1}{2} \int (d\mathfrak{s} \nabla) \mathbf{v}^2,$$

denn in der That ist die Veränderung, die $d\mathfrak{s}$ im Zeitelemente dt erfährt gleich der Wegedifferenz der beiden Endpunkte von $d\mathfrak{s}$, als ogleich $(d\mathfrak{s} \nabla) \mathbf{v} dt$. Das zuletzt stehende Integral verschwindet aber, wenn wir es auf eine geschlossene Curve erstrecken und man hat, vorläufig noch ohne Zugrundelegung einer physikalischen Hypothese

$$\frac{d}{dt} \int \mathbf{w} \mathfrak{N} df = \int \frac{d\mathbf{v}}{dt} d\mathfrak{s} \quad . \quad . \quad . \quad (135)$$

Unter Zuziehung der dynamischen Grundgleichung und der Annahme, dass die äussere Kraft $\mathfrak{P}$ wirbelfrei vertheilt ist, folgt dann, dass die Wirbelstärke eines aus denselben Flüssigkeitstheilchen gebildeten Fadens der Zeit nach constant ist.

Mit diesen Erörterungen bin ich freilich schon weit über das Gebiet der eigentlichen Feldgeometrie hinausgegangen. In der That erweitert sich immer die Geometrie der Felder zu einer Feldkinematik oder zu einer Feldmechanik, sobald eine bestimmte Annahme über den Zusammenhang zwischen der scalaren Differentiation von $\mathbf{v}$ nach t und den Raumdifferen-

tiationen, die daran nach $\mathbf{r}$ ausgeführt werden können, gemacht wird. Ohne einen solchen Zusammenhang sind aber die Gesetze der von $\mathbf{r}$ und t abhängigen Funktion schon in den früheren mit enthalten. Es schien mir daher zweckmässig, an einem einwandfreien Beispiele zu zeigen, auf welche Art Erfahrungsthatfachen oder physikalische Hypothesen mit den streng gültigen Sätzen über die allgemeinen Eigenschaften der Vectorfunktionen verbunden zu werden pflegen, um daraus die physikalischen Theorien abzuleiten.

§ 32. Das Feld als Streckensystem.

Wir werden jetzt dazu übergehen, Raumsummen verschiedener Art zu bilden. Unter einer Raumsumme verstehe ich das Ergebniss irgend einer Summation über den ganzen unendlichen Raum. Schon in § 4 habe ich die einfachste Raumsumme besprochen, die man von einer gegebenen Funktion $\mathbf{u}$ bilden kann, nämlich das über den ganzen unendlichen Raum erstreckte Integral $\int \mathbf{u} d\tau$, das ich dort speciell auch als die Feldsumme bezeichnete. Wir fanden dort, dass die Feldsumme für ein quellenfreies Feld gleich Null ist und sich bei anderen Feldern leicht aus der Vertheilung der Quellen berechnen lässt. Daraus folgt unter Anderem auch, dass stets

$$\int \mathbf{w} d\tau = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (136)$$

ist, da die Funktion $\mathbf{w}$ immer quellenfrei ist. Diese Gleichung bildet ein bemerkenswerthes Gegenstück zu der schon früher gefundenen $\int q d\tau = 0$ und wir sehen von Neuem, wie Quellen und Wirbel in einer wichtigen Eigenschaft übereinstimmen.

Anstatt die Vektoren $\mathbf{u} d\tau$ einfach zu summiren, kann man sich auch die Aufgabe stellen, die $\mathbf{u} d\tau$ in derselben Weise zusammenzusetzen, wie Kräfte, die an einem starren Körper angreifen. Denken wir uns gradezu $\mathbf{u} d\tau$ durch eine am Volumenelemente $d\tau$ angreifende Kraft abgebildet, so können alle so gewonnenen Kräfte durch eine Resultirende, die durch einen

beliebig gewählten Angriffspunkt geht und ein Kräftepaar ersetzt werden. Die Resultirende entspricht der schon vorher berechneten Feldsumme, das Moment des Kräftepaars ist dagegen noch zu ermitteln. Bezeichnen wir den von dem Angriffspunkt der Resultirenden nach $d\tau$ gezogenen Radiusvector, der zugleich der Hebelarm der Kraft $\mathbf{v}d\tau$ ist, mit $\mathbf{r}$, so wird das Moment des resultirenden Kräftepaars

$$\mathfrak{M} = \int V \mathbf{v} \mathbf{r} d\tau. \quad (137)$$

Für den Fall des quellenfreien Feldes ist dieser Ausdruck unabhängig von der Wahl des Momentenpunktes, von dem die Radienvectoren $\mathbf{r}$ gezogen sind. Erstreckt man nämlich die Summirung zunächst über eine in sich geschlossene Stromröhre, so erhält man, wenn f den Querschnitt, $d\mathbf{s}$ ein in der Richtung $\mathbf{v}$ gehendes Element der Leitlinie und $fv = F$ den durch die Stromröhre gehenden Fluss bedeuten,

$$\int fv V d\mathbf{s} \mathbf{r} \quad \text{oder} \quad F \int V d\mathbf{s} \mathbf{r}.$$

Das Integral ist über die Leitlinie der Stromröhre zu erstrecken und hat eine einfache geometrische Bedeutung; $\int V d\mathbf{s} \mathbf{r}$ wird nämlich durch das Doppelte der Dreiecksfläche angegeben, die $d\mathbf{s}$ zur Grundlinie und den Momentenpunkt zur gegenüber liegenden Spitze hat. Alle diese Dreiecke bilden zusammen den Kegelmantel, durch den die Leitlinie der Stromröhre vom Momentenpunkte aus projecirt wird. Bei der Integration sind aber alle Dreiecksflächen geometrisch, d. h. mit Berücksichtigung der Richtung ihrer Normalen zu summiren. Denken wir uns eine Fläche durch die Leitlinie gelegt, so dass die Leitlinie den Rand dieser Fläche bildet und die Fläche selbst mit dem vorher besprochenen Kegelmantel zusammen einen kegelförmigen Raum abgrenzt, so kann $\int V d\mathbf{s} \mathbf{r}$, abgesehen vom Vorzeichen, auch gleich dem doppelten Inhalte dieser Fläche gesetzt werden, denn man weiss, dass die geometrische Summe aller Flächen, die zusammen die Oberfläche eines beliebig gestalteten Körpers bilden, gleich Null ist. Die vorher erwähnte Fläche ist aber ganz unabhängig von der

Lage des Momentenpunktes und daher gilt dasselbe auch von dem Momente $\mathfrak{M}$.

Was für eine Stromröhre erhalten war, lässt sich durch Summierung über alle Stromröhren des ganzen Feldes ohne Weiteres auch auf das ganze Feld übertragen.

Die Feldsumme und das Feldmoment $\mathfrak{M}$ sind geeignete Grössen, um die Stärke der Erregung eines ganzen physikalischen Feldes zu messen; der Feldsumme wird man sich beim quellen-, des Feldmomentes beim wirbelfreien Felde bedienen. Ein Wirbelsystem $\mathfrak{w}$ ist immer quellenfrei und man kann das von der Wahl des Momentenpunktes unabhängige Moment

$$\mathfrak{M} = \int V \mathfrak{w} r d\tau \quad (138)$$

daher als eine die Gesamtstärke des Wirbelsystems charakterisierende Grösse auffassen. Wie sie für einen einzelnen Wirbelfaden zu ermitteln ist, geht aus den vorausgehenden Erörterungen hervor; das Moment $\mathfrak{M}$ ist gleich dem doppelten Produkt aus der Wirbelstärke und der von dem Faden umschlossenen Fläche, falls diese eben ist. Im anderen Fall muss erst noch die geometrische Summe dieser Fläche abgeleitet werden.

Natürlich sind alle diese Betrachtungen im Grunde genommen nur specielle Anwendungen der Theorie der Streckensysteme auf das hier vorliegende System der Strecken $\mathfrak{w} d\tau$. Ich will mich daher nicht weiter mit Beweisen für einige Sätze aufhalten, an die der Leser schon längst gedacht haben wird. Offenbar kann man nämlich im wirbelfreien Felde immer eine Grade angeben, für deren sämtliche Punkte das Moment $\mathfrak{M}$ nach Gl. (137) verschwindet. Das quellenfreie Feld entspricht dem Falle eines Kräftesystems, das sich durch eine einzige Resultirende ersetzen lässt. Für ein Feld, das gleichzeitig Wirbel und Quellen enthält, kann man dagegen immer eine Centralaxe angeben, die gleichgerichtet mit der Feldsumme ist und mit der auch die Richtung des Momentes $\mathfrak{M}$ für alle auf ihr liegenden Punkte zusammenfällt.

§ 33. Die Quadratsummen.

Eine andere Raumsumme erweist sich in vielen Fällen als noch besser geeignet, den gesammten Inhalt eines Feldes durch einen einzigen Werth zu kennzeichnen oder die Intensitäten verschiedener Felder im Ganzen mit einander zu vergleichen, nämlich die Quadratsumme

$$Q = \frac{1}{2} \int_{\infty}^{\infty} \mathfrak{v}^2 d\tau. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (139)$$

Vor der Feldsumme $\mathfrak{F} = \int_{\infty}^{\infty} \mathfrak{v} d\tau$ hat diese Art der Abschätzung zunächst den Vorzug, dass jedes Volumenelement einen positiven Beitrag liefert und dass Q daher nur dann verschwinden kann, wenn das Feld selbst überall verschwindet. Man hat also in diesem Ausdrücke unter allen Umständen ein bestimmtes Maass für die gesammte Erregung, die in einem physikalischen Felde $\mathfrak{v}$ stattfindet. Ausserdem hat der Werth Q aber noch den besonderen Vorzug, dass er der Erfahrung zufolge in vielen Fällen der Anwendung das Maass der Energie des Feldes bildet. Dieser Umstand kommt hier freilich nicht weiter in Betracht, da wir uns um die Anwendungen nicht weiter kümmern wollen. Er rechtfertigte es aber, dass der sonst bedeutungslose Faktor $\frac{1}{2}$ vor das Integral gesetzt wurde, den man unter anderen Umständen natürlich besser weglassen würde. Es steht uns aber jedenfalls frei, ihn in der Definitionsgleichung für Q willkürlich einzuführen.

Für die Quadratsumme Q kann man einige sehr bemerkenswerthe Sätze angeben, die diesem Ausdrücke auch schon rein analytisch betrachtet eine grosse Bedeutung verleihen. Ich denke mir, um den ersten Satz abzuleiten, die Feldgrösse $\mathfrak{v}$, so wie es in § 31 besprochen war, in ihren wirbelfreien Bestandtheil $\mathfrak{v}_1$ und ihren quellenfreien Bestandtheil $\mathfrak{v}_2$ zerlegt. Dann geht Q über in

$$Q = \frac{1}{2} \int_{\infty}^{\infty} \mathfrak{v}_1^2 d\tau + \frac{1}{2} \int_{\infty}^{\infty} \mathfrak{v}_2^2 d\tau + \int_{\infty}^{\infty} \mathfrak{v}_1 \mathfrak{v}_2 d\tau.$$

Das letzte der über den ganzen unendlichen Raum erstreckten Integrale muss aber immer verschwinden. Um dies

zu beweisen, setze ich $\mathbf{v}_1 = -\nabla V$, wo V das zu $\mathbf{v}_1$ gehörige scalare Potential bedeutet; man hat dann

$$\operatorname{div}(\mathbf{v}_2 V) = V \operatorname{div} \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2,$$

wovon man sich durch Ausführung der Operation div sofort überzeugt (vgl. Gl. 78 der Maxw. Theorie). Da $\mathbf{v}_2$ quellenfrei war, fällt das erste Glied auf der rechten Seite fort und man hat

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 d\tau = - \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{div}(\mathbf{v}_2 V) d\tau.$$

Die Funktion $\mathbf{v}_2 V$ erstreckt sich nicht ins Unendliche, da dies nach der hier stets gültigen Voraussetzung schon von $\mathbf{v}_2$ nicht zutraf und da die Multiplikation mit V , das im Unendlichen ebenfalls verschwindet, die Grössenordnung des Produkts in grosser Entfernung noch weiter herabdrückt. Die Raumsumme aller Quellen von $\mathbf{v}_2 V$ verschwindet daher nach § 4 und wir erhalten in der That

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 d\tau = 0. \quad (140)$$

Für die Quadratsumme Q finden wir demnach

$$Q = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v}_1^2 d\tau + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v}_2^2 d\tau = Q_1 + Q_2, \quad (141)$$

wobei die Quadratsummen des wirbelfreien und des quellenfreien Bestandtheiles für sich genommen mit Q_1 und Q_2 bezeichnet sind. Bedeutet also Q die Energie eines physikalischen Feldes $\mathbf{v}$, so ist diese gleich der Summe der Energiemengen, die den beiden Feldcomponenten zukommen, wenn man jede für sich allein betrachtet. Dies zeigt uns von Neuem, wie nützlich die Eintheilung der Vectorfunktionen nach den ihnen zukommenden Quellen und Wirbeln ist.

Unter der Voraussetzung, dass Q in der That der richtige Ausdruck für die Energie eines gewissen physikalischen Feldes ist und dass ferner durch die Energievertheilung das physikalische Geschehen, d. h. $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ bestimmt ist, wird durch Gl. (141) für einen solchen Fall in hohem Grade wahrschein-

lich gemacht, dass jede der beiden Componenten $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$ unabhängig von der anderen zu physikalischen Phänomenen führt, die sich nebeneinander abspielen, ohne sich zu beeinflussen. Diese Bemerkung geht hier natürlich nur nebenbei; so nahe sie auch liegt, kann man doch keine sicheren Schlüsse auf sie stützen, denn die Vorgänge in der Natur sind unabhängig von der Art, wie wir sie einstweilen auffassen und das Einzige, was wir thun können, um ihre Gesetze zu erforschen, besteht darin, dass wir die Vorstellungen, die sich bis dahin bewährt haben, vorsichtig tastend weiterbilden, stets bereit, sie durch andere zu ersetzen, wenn sich ihre Folgerungen mit der Erfahrung nicht decken. Die Gesetze der Feldgeometrie bilden allein das feste Fundament, auf das wir uns dabei unbedingt verlassen können.

§ 34. Der Satz von Green und seine Erweiterungen.

Die Quadratsumme Q_1 für die wirbelfreie Componente $\mathfrak{v}_1$ kann auch einer anderen Raumsumme gleich gesetzt werden, die ich jetzt ableiten werde. Zu diesem Zwecke gehe ich von der schon vorher in ähnlicher Form benutzten Identität

$$\operatorname{div}(\mathfrak{v}_1 V) = V \operatorname{div} \mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_1^2$$

aus. Für $\operatorname{div} \mathfrak{v}_1$ kann ich q setzen. Nach Multiplikation mit $d\tau$ und Integration über den ganzen Raum folgt daher

$$Q_1 = \frac{1}{2} \int \mathfrak{v}_1^2 d\tau = \frac{1}{2} \int V q d\tau, \quad . \quad . \quad . \quad (142)$$

denn die Raumsumme von $\operatorname{div}(\mathfrak{v}_1 V)$ verschwindet aus den schon vorher erörterten Gründen. Gl. (142) oder eigentlich eine etwas allgemeinere Fassung dieser Gleichung, die uns hier nicht interessirt, spricht den Green'schen Lehrsatz aus. Die Quadratsumme für ein wirbelfreies Feld oder für den wirbelfreien Antheil eines beliebigen Feldes kann daher schon gefunden werden, wenn man nur das zugehörige Quellensystem und das Potential kennt. Zugleich erkennen wir, dass, wenn Q_1 den Betrag der Feldenergie angibt, zwei ganz verschiedene Vertheilungen dieser Energie auf die einzelnen Volumenelemente

in gesetzmässiger Weise geometrisch möglich sind; darin liegt die Wurzel für den Zwiespalt zwischen den beiden sich gegenüber stehenden Anschauungen der Fernwirkungs- und der Nahewirkungstheorie in der Physik und besonders in der Elektrizitätslehre.

Auch die Quadratsumme Q_2 für die quellenfreie Feldcomponente $\mathbf{v}_2$ lässt eine ähnliche Umformung zu. Bezeichnet $\mathfrak{A}$ das Vectorpotential, aus dem sich $\mathbf{v}_2$ ableiten lässt, so hat man identisch

$$\operatorname{div} V \mathfrak{A} \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2^2 - \mathfrak{A} \mathfrak{w} \quad . \quad . \quad . \quad (143)$$

nach einem der bekanntesten Sätze der Vectoranalysis (Gl. 81 der Maxw. Theorie); indessen überzeugt man sich auch durch Zerlegen in Componenten und Ausführung der vorgeschriebenen Operationen leicht ohne Weiteres von der Identität beider Seiten dieser Gleichung.

Die Funktion $V \mathfrak{A} \mathbf{v}_2$ kann sich aus denselben Gründen wie die ihr im wirbelfreien Felde entsprechende $V \mathbf{v}_1$ nicht ins Unendliche erstrecken und daher ist die aus ihr gebildete Raumsumme gleich Null. Aus Gl. (143) erhalten wir demnach

$$Q_2 = \frac{1}{2} \int \mathbf{v}_2^2 d\tau = \frac{1}{2} \int \mathfrak{A} \mathfrak{w} d\tau \quad . \quad . \quad . \quad (144)$$

Auch für die Bedeutung dieser Umformung gelten ganz entsprechende Bemerkungen, wie sie vorher an den Green'schen Satz geknüpft wurden.

Die Quadratsumme einer beliebigen Funktion $\mathbf{v}$ kann hiernach stets in der Form

$$Q = \frac{1}{2} \int (Vq + \mathfrak{A} \mathfrak{w}) d\tau \quad . \quad . \quad . \quad (145)$$

dargestellt werden.

Aus der letzten Gleichung kann man, wie an dieser Stelle nachträglich bemerkt werden mag, noch auf andere Art als es in dieser Schrift auf Grund der blossen Anschauung der Stromlinien geschehen ist, den Beweis dafür ableiten, dass eine Funktion durch ihre Quellen und ihre Wirbel eindeutig definirt ist. Ist nämlich zunächst im ganzen Raume $q = 0$ und $\mathfrak{w} = 0$, so folgt nach Gl. (145) $Q = 0$ und daher nach einer schon

im Eingange des vorigen Paragraphen gemachten Bemerkung auch $\mathfrak{v} = 0$. Betrachtet man nun zwei Funktionen $\mathfrak{v}$, die zu denselben Quellen und Wirbeln gehören sollen, so muss ihre Differenz gleichzeitig quellenfrei und wirbelfrei und daher überall gleich Null sein; beide Funktionen stimmen also vollständig überein, d. h. es gibt nur eine Funktion, die gleichzeitig zu einem gegebenen Quellen- und einem gegebenen Wirbelsysteme gehört.

Schliesslich mache ich noch darauf aufmerksam, dass die Umformung, die zu Gl. (145) führte, auch noch etwas verallgemeinert werden kann, wenn man in den beiden Funktionenfolgen $V, \mathfrak{v}_1, q$ und $\mathfrak{M}, \mathfrak{v}_2, \mathfrak{w}$ auch noch die Glieder in Betracht zieht, die man oben und unten ansetzen kann, wie es in § 25 besprochen wurde. Betrachtet man z. B. die Folge

$$\mathfrak{M}, V, \mathfrak{v}_1, q, \mathfrak{p}$$

in dem in § 25 erörterten Sinne, so hat man

$$\operatorname{div} (\mathfrak{M} q) = V q - \mathfrak{M} \mathfrak{p}$$

und daher auch

$$Q_1 = \frac{1}{2} \int^{\infty} \mathfrak{M} \mathfrak{p} d\tau (146)$$

Ebenso sei die Funktionenfolge der quellenfreien Feldcomponenten erweitert zu

$$\mathfrak{x}, \mathfrak{M}, \mathfrak{v}_2, \mathfrak{w}, \mathfrak{y}.$$

Dann ist nach dem vorher schon in Gl. (143) benutzten Satze und mit Rücksicht auf den Zusammenhang zwischen aufeinander folgenden Gliedern in dieser Reihe

$$\operatorname{div} V \mathfrak{x} \mathfrak{w} = \mathfrak{M} \mathfrak{w} - \mathfrak{x} \mathfrak{y}$$

und bei Bildung der Raumsumme daher auch

$$Q_2 = \frac{1}{2} \int^{\infty} \mathfrak{x} \mathfrak{y} d\tau (147)$$

Im Ganzen wird daher die Quadratsumme einer beliebigen Funktion auch durch den Ausdruck

$$Q = \frac{1}{2} \int^{\infty} (\mathfrak{M} \mathfrak{p} + \mathfrak{x} \mathfrak{y}) d\tau (148)$$

wiedergegeben, der selbst noch einige Umformungen zulässt. Für $\mathfrak{M} + \mathfrak{X}$ kann man nämlich (vgl. § 25) $\text{pot } \mathfrak{v}$ und für $\mathfrak{p} + \mathfrak{y}$ kann man $-\nabla^2 \mathfrak{v}$ setzen. Ausserdem ist die Raumsumme von $\mathfrak{M} \mathfrak{y}$ und die von $\mathfrak{X} \mathfrak{p}$ gleich Null. Ein Faktor dieser Produkte ist nämlich wirbelfrei und der andere quellenfrei und nach Gl. (140) ist die Raumsumme eines solchen Produktes immer Null. Bei Ableitung von Gl. (140) war es nämlich ganz unwesentlich, dass $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$ als Bestandtheile einer ursprünglich gegebenen Funktion $\mathfrak{v}$ eingeführt wurden, vielmehr konnten $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$ sonst ganz beliebige Funktionen sein, wenn nur die eine davon wirbelfrei und die andere quellenfrei war. Mit Rücksicht auf diese Bemerkungen folgt aus Gl. (148) für die Quadratsumme einer beliebigen Funktion $\mathfrak{v}$ auch

$$Q = -\frac{1}{2} \int^{\infty} \text{pot } \mathfrak{v} \cdot \nabla^2 \mathfrak{v} d\tau \dots \dots \dots (149)$$

§ 35. Raumsumme einer Potentialfunktion.

Unter V sei wieder ein scalares Potential verstanden, das zu einem sich nicht ins Unendliche erstreckenden wirbelfreien Felde $\mathfrak{v}_1$ gehört. Dann ist stets

$$\int^{\infty} V d\tau = 0. \dots \dots \dots (150)$$

Zum Beweise kann man von einem Felde ausgehen, das aus zwei punktförmigen Quellen $\pm q$ gebildet wird. Sind die Abstände des Raumelementes $d\tau$ von beiden Punkten r_1 und r_2 , so folgt nach § 8

$$V = \frac{q}{4\pi} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Denkt man sich nun eine Ebene, die den Abstand beider Quellpunkte senkrecht halbirt, so sind für je zwei Raumelemente, die zu dieser Ebene spiegelbildlich liegen, die Beiträge $V d\tau$ zu der Raumsumme gleich gross und von entgegengesetztem Vorzeichen. Durch diese Bemerkung ist Gl. (150) für das Quellenpaar $\pm q$ bewiesen. Jedes andere Quellensystem lässt sich aber, wie schon in § 4 gezeigt wurde, durch eine

Uebereinanderlagerung solcher Quellenpaare construiren, und da V für das ganze Quellensystem durch eine Summirung über die einzelnen Constituenten gefunden wird, folgt, dass Gl. (150) auch für diesen Fall gültig bleibt.

Man kann daraus weiter schliessen, dass sich auch die Funktion $\mathfrak{M} = \text{pot } \mathfrak{v}_1$ nicht ins Unendliche erstreckt, falls $\mathfrak{v}_1$ dieser Voraussetzung genügt, denn V gibt das Quellensystem von $\mathfrak{M}$ an und Gl. (150) enthält daher die erforderliche Bedingung.

Dass auch

$$\int^{\infty} \mathfrak{A} d\tau = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (151)$$

ist, folgt schon aus der einfachen Bemerkung, dass die Funktion $\mathfrak{A}$ nach ihrer Definition quellenfrei ist. Die Feldsumme für ein quellenfreies Feld ist immer gleich Null.

§ 36. Die Potentialfunktion als Raumsumme.

Die früher besprochenen Raumsummen waren constante, für das ganze Feld charakteristische Werthe. Es steht nichts im Wege, ihre Zahl noch zu vergrössern, also z. B. die Eigenschaften der Summen $\int^{\infty} V^2 d\tau$, $\int^{\infty} \mathfrak{v}^3 d\tau$ u. s. f. zu untersuchen. Ich sehe aber davon ab, da ich mir nicht viel Gewinn von einer solchen Untersuchung verspreche.

Man kann aber in das Element einer Raumsumme auch eine veränderliche Grösse aufnehmen, so dass die Summe selbst zu einer Funktion dieser veränderlichen Grösse wird. Wenn wir auch noch nichts von den Potentialfunktionen wüssten, würden wir durch diesen naheliegenden Schritt zu ihnen hingeführt. Die einfachste Art, auf diesem Wege eine neue Funktion aus einer gegebenen zu erzeugen, besteht nämlich offenbar darin, eine Raumsumme zu bilden, die sich nur auf einen bestimmt gewählten Punkt des Feldes, den Aufpunkt, bezieht und die daher eine Funktion des Radiusvectors dieses Aufpunktes ist. Zu diesem Zwecke wird man auf irgend eine Art den Abstand des Aufpunktes von dem Volumenelemente

$d\tau$ in das Summenelement aufzunehmen haben. An einer Stelle ist dies in der That auch schon geschehen, als wir nämlich in § 32 das Feldmoment für den Aufpunkt ableiteten. Dort zeigte sich aber, dass dieses Moment im quellenfreien Felde unabhängig von der Lage des Aufpunktes ist, also eine constante Raumsumme bildet. Im Quellenfelde ist es zwar eine Funktion der Aufpunktslage; es erstreckt sich aber ins Unendliche und kommt daher für uns nicht weiter in Betracht.

Wir müssen uns daher nach anderen Verknüpfungen umsehen und zwar werden wir von den einfachsten, die dabei in Frage kommen können, jene aufzusuchen haben, die zu nicht ins Unendliche reichenden Funktionen führen können. Man hat nun zwar immer noch die Auswahl zwischen vielen Möglichkeiten; unter allen diesen dürfte aber doch immer die am nächsten liegen, die Raumsumme

$$\int \frac{\mathfrak{v} d\tau}{a} \quad \text{oder} \quad \int \frac{q d\tau}{a}$$

ins Auge zu fassen und damit wird man in der That wieder auf die Potentiale geführt. Vielleicht gibt es auch noch andere Raumsummen ähnlicher Art, mit deren näherer Untersuchung man einen glücklichen Griff machen würde.

§ 37. Krümmungsmaass eines Feldes.

Innerhalb eines unendlich kleinen Bezirks kann man, wie wir im zweiten Kapitel sahen, jedes beliebige stetige Feld in erster Annäherung durch eine lineare Vectorfunktion darstellen oder es durch das berührende lineare Feld ersetzen.

Dass wir die Art der Uebereinstimmung beider Felder in diesem Bezirke als eine Berührung bezeichneten, deckt sich in jeder Hinsicht mit dem Gebrauche, den man sonst in der Geometrie von diesem Worte macht.

Wie man bei der Untersuchung der Curven und der Flächen nicht dabei stehen bleibt, die Tangente oder die Tangentialebene aufzusuchen, sondern auch die Abweichung der einen von der anderen innerhalb eines unendlich kleinen Be-

zirks in Betracht ziehen muss, stellt sich die gleiche Aufgabe auch in der Geometrie der Felder ein. Von der Art und Grösse der Abweichung hängt bei den Curven und Flächen das ab, was man ihre Krümmung nennt; ich bin daher berechtigt, den Begriff der Krümmung auch auf den hier vorliegenden Fall zu übertragen und verstehe darunter ganz allgemein jene Eigenschaft des Feldes, die die von der zweiten Ordnung unendlich kleinen Abweichungen zwischen dem gegebenen Felde und dem berührenden linearen Felde innerhalb eines unendlich kleinen Bezirks veranlasst.

Die Krümmungstheorie der Felder wird sich, wenn sie einmal vollständig entwickelt werden sollte, natürlich weit vielseitiger gestalten als etwa die der Flächen. Hier kann es sich nur um erste Anläufe dazu handeln; namentlich erscheint es wünschenswerth, einen Werth aufzusuchen, der als Maass der Krümmung des Feldes an einer gegebenen Stelle im Ganzen benützt werden kann, ähnlich etwa wie das Krümmungsmaass einer Fläche. An dieses selbst glaube ich mich hier freilich nicht mit Vorthail anlehnen zu können und ich möchte es überhaupt noch als zweifelhaft hinstellen, welche Grösse sich am meisten dazu eignet, als Krümmungsmaass eines Feldes benutzt zu werden. In dieser Hinsicht bitte ich daher die nachfolgenden Erörterungen nur als vorläufige zu betrachten.

Man lege in den Punkt des Feldes, für den man die Krümmungsverhältnisse untersuchen will, den Ursprung eines rechtwinkligen Coordinatensystems. Nach der Taylor'schen Entwicklung hat man dann im Innern einer Kugel, deren Radius r von der ersten Ordnung unendlich klein ist, für die X-Componente dv_1 von dv bis auf unendlich kleine Grössen zweiter Ordnung genau

$$\left. \begin{aligned}
 dv_1 = & \frac{\partial v_1}{\partial x} dx + \frac{\partial v_1}{\partial y} dy + \frac{\partial v_1}{\partial z} dz \\
 & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} dx^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} dy^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} dz^2 \\
 & + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial z} dx dz + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y \partial z} dy dz
 \end{aligned} \right\} \quad . \quad (152)$$

und ähnlich für die beiden anderen Componenten. Die Glieder erster Ordnung in dieser Entwicklung interessiren uns hier nicht weiter; sie decken sich mit den Componenten für das berührende lineare Feld. Von den Gliedern zweiter Ordnung hängt dagegen die Krümmung des Feldes ab. Bezeichnen wir die Abweichung zwischen dem Felde $\mathfrak{v}$ und dem berührenden linearen Felde mit $\delta\mathfrak{v}$, so erhalten wir aus Gl. (152) durch Zusammenziehung der drei Componenten

$$\delta\mathfrak{v} = \left. \begin{aligned} &\frac{\partial^2 \mathfrak{v}}{\partial x^2} \cdot \frac{dx^2}{2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{v}}{\partial y^2} \cdot \frac{dy^2}{2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{v}}{\partial z^2} \cdot \frac{dz^2}{2} \\ &+ \frac{\partial^2 \mathfrak{v}}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 \mathfrak{v}}{\partial x \partial z} dx dz + \frac{\partial^2 \mathfrak{v}}{\partial y \partial z} dy dz \end{aligned} \right\} . \quad (153)$$

Die zweiten Differentialquotienten von $\mathfrak{v}$ sind im Innern der unendlich kleinen Kugel, für die die Entwicklung gilt, als constante Grössen anzusehen. Denken wir uns irgend einen Durchmesser gezogen und in jedem Punkte die dort stattfindende Abweichung $\delta\mathfrak{v}$ aufgetragen, so erkennen wir, dass alle diese Strecken parallel unter einander sind und dass sich ihre Grössen zu einander verhalten, wie die Quadrate der Abstände vom Mittelpunkte. Die Endpunkte dieser Strecken liegen also auf einem Parabelbogen, der den Durchmesser berührt. Durch die Grösse des Krümmungshalbmessers dieses Bogens und durch die Richtung von $\delta\mathfrak{v}$ wird die Krümmung des Feldes längs des gezogenen Durchmessers vollständig beschrieben. Um die Krümmung des Feldes vollständig zu kennen, muss man für jeden Durchmesser der Kugel diese beiden Angaben machen können.

Es scheint mir nun, dass man eine summarische Angabe über die Gesamtkrümmung am besten dadurch erhält, dass man von $\delta\mathfrak{v}$ die über das Volumen der unendlich kleinen Kugel erstreckte Feldsumme nimmt. Ich setze also, um zu einem endlichen Werthe zu gelangen,

$$\mathfrak{k} = \frac{4}{\Theta} \int \delta\mathfrak{v} d\tau, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (154)$$

worin Θ das Trägheitsmoment der unendlich kleinen Kugel vom Radius r in Bezug auf einen Durchmesser bedeutet. Der Faktor 4 im Zähler ist willkürlich eingeführt, um die folgenden Formeln einfacher zu gestalten. Den Vector $\mathfrak{f}$ betrachte ich als ein Maass für die Krümmung des Feldes. Den Werth von $\delta\mathfrak{v}$ setze ich aus Gl. (153) ein und beachte, dass die Integrale

über das Kugelvolumen von der Form $\int^r dx dy d\tau$ wegfallen, weil sich die Kugel z. B. durch die YZ -Ebene in zwei Hälften zerlegen lässt, von denen je zwei spiegelbildlich zu einander liegende Raumelemente $d\tau$ gleiche Beiträge von entgegengesetztem Vorzeichen zu dem Integrale liefern. Dagegen ist z. B.

$$\int^r dx^2 d\tau = \frac{1}{2}\Theta$$

nach der Definition des Trägheitsmoments. Für $\mathfrak{f}$ erhält man daher

$$\mathfrak{f} = \frac{\partial^2 \mathfrak{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{v}}{\partial z^2} = \nabla^2 \mathfrak{v}. \quad . \quad . \quad . \quad (155)$$

Wir sind damit in der That zu einem sehr einfachen und, wie mir scheint, bemerkenswerthen Ausdrücke für die Feldkrümmung gelangt. Drückt man $\nabla^2 \mathfrak{v}$ mit Hülfe der Quellen q und der Wirbel $\mathfrak{w}$ aus, so ist auch

$$\mathfrak{f} = \nabla q - \text{curl } \mathfrak{w}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (156)$$

An allen Stellen des Feldes, die weder Quellen noch Wirbel enthalten, (oder wo diese constant sind) ist das Krümmungsmaass $\mathfrak{f}$ gleich Null. Freilich ist damit nicht gesagt, dass das Feld überhaupt nicht gekrümmt, also linear sei. Die Krümmungen längs verschiedener Durchmesser erfolgen nur nach Richtungen, die zum Theil einander entgegengesetzt sind, so dass die geometrische Summe aller Krümmungen verschwindet.

Will man ein Krümmungsmaass haben, das nur dann verschwindet, wenn das Feld linear, also gar nicht mehr gekrümmt ist, so muss man die Quadratsumme von $\delta\mathfrak{v}$ für das Kugelinnere bilden. Mit Hülfe des Ausdrucks für $\delta\mathfrak{v}$ in Gl. (153) lässt sich dies leicht ausführen; man kommt aber dabei auf

einen ziemlich weitläufigen Ausdruck, mit dem ich einstweilen nichts weiter anzufangen weiss.

Schliesslich bemerke ich noch, dass man Gl. (153) auch für endliche Werthe der Coordinaten $dx dy dz$ gelten lassen kann. Man kommt damit auf ein Feld zweiter Ordnung, das sich dem gegebenen anschmiegt. Vor der eingehenderen Erörterung der Krümmungstheorie der Felder müssten natürlich die Eigenschaften der Felder zweiter Ordnung ausführlich erörtert werden, in ähnlicher Weise etwa, wie dies im zweiten Capitel dieser Schrift für die linearen Felder geschehen ist.

Ich sehe indessen von solchen Untersuchungen ab. Als Hauptgewinn dieses kurzen Ueberblicks über die Krümmungseigenschaften betrachte ich die anschauliche geometrische Deutung, die der Operator ∇^2 , der in der Potentialtheorie so häufig vorkommt, durch Gl. (155) erhalten hat.

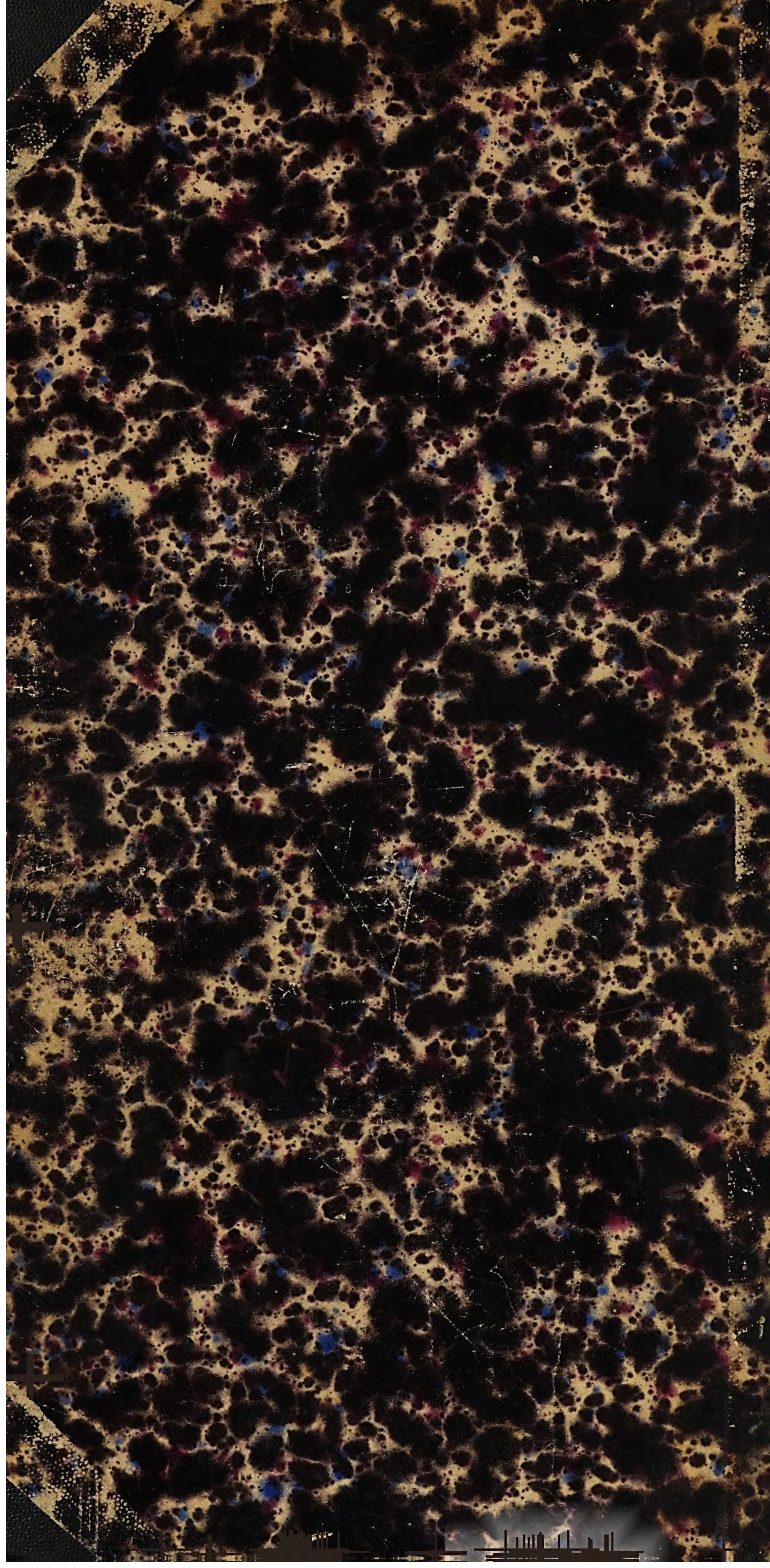
Jede Vectorfunktion kann auch durch eine Raumtransformation dargestellt werden. Man braucht dazu nur im Punkte $\mathbf{r}$ den Vector $\mathbf{u} = f(\mathbf{r})$ in einem passenden Maassstabe abzutragen und den Endpunkt der Strecke im transformirten Raume dem Anfangspunkte der Strecke im ursprünglichen Raume zuzuordnen. Die Lehre von den Transformationsgruppen hat jetzt eine so grosse Ausbildung und Vertiefung erhalten, dass vermuthlich alle hier besprochenen Eigenschaften der Vectorfunktionen schon längst in freilich viel allgemeinerer Form ausgearbeitet vorliegen. Um diesen Schatz für die physikalischen Theorien nutzbar zu machen, muss man aber über so ausgedehnte mathematische Kenntnisse verfügen, wie sie einem theoretischen Physiker wohl nur ganz selten zu Gebote stehen. Der Mathematiker andererseits, bei dem diese Voraussetzung zutrifft, zeigt sich gewöhnlich wenig geneigt, aus dem umfangreichen Stoffe, den er beherrscht, das für die praktische Anwendung Geeignete in entsprechend einfacher Form hervorzuheben; ihn interessiren fast ausschliesslich die Anwendungen der höheren mathematischen Lehren auf andere rein mathematische Probleme. Der Praktiker — wie er hier vergleichsweise zu nennen ist — sieht sich daher auf sich selbst an-

gewiesen. Ein solcher Schritt der Selbsthülfe war es, der zur Bearbeitung dieses Heftes führte. Ich erhebe gar keinen Anspruch darauf, als Mathematiker zu gelten oder mich mit dieser Schrift als solcher einzuführen und wünsche nur, anderen, die sich in gleicher Lage wie ich befinden, einen Dienst mit meiner Arbeit erwiesen zu haben.

- Kohlrausch, Dr. F.**, Präsident der physikalisch-technischen Reichsanstalt in Charlottenburg, Leitfaden der praktischen Physik, mit einem Anhang: das absolute Maass-System. 8. vermehrte Aufl. [XVI u. 492 S. m. zahlr. Textfig.] gr. 8. 1896. Biegs. in Lwd. geb. n. *M* 7.—
- Krause, Dr. Martin**, Professor an der Königl. Sächs. technischen Hochschule zu Dresden, Theorie der doppeltperiodischen Functionen einer veränderlichen Grösse. 2 Bände. I. Band. [VIII u. 328 S.] gr. 8. 1895. geh. n. *M* 12.—
- Kronecker's, Leopold**, Werke. Herausgegeben auf Veranlassung der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften von K. HENSEL. 4 Bände. I. Band. Mit L. Kronecker's Bildniss. [IX u. 483 S.] gr. 4. 1895. geh. n. *M* 28.—
- Lie, Sophus**, Geometrie der Berührungstransformationen. Dargestellt von SOPHUS LIE und GEORG SCHEFFERS. In 2 Bänden. I. Band. Mit Figuren im Text. [XII u. 694 S.] gr. 8. 1896. geh. n. *M* 24.—
- v. Lilienthal, Dr. R.**, a. o. Professor der Mathematik an der kgl. Akademie zu Münster i. W., Grundlagen einer Krümmungslehre der Curvenscharen. [VII u. 114 S.] gr. 8. 1896. geh. n. *M* 5.—
- Markoff, A. A.**, o. Professor an der Kaiserlichen Universität zu St. Petersburg, o. Mitglied der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg, Differenzenrechnung. Autorisierte deutsche Übersetzung von THEOPHIL FRIESENDORFF und ERICH PRÜMM. Mit einem Vorworte von R. MEHMKE, o. Prof. an der k. technischen Hochschule zu Stuttgart. [VI u. 194 S.] gr. 8. 1896. geh. n. *M* 7.—
- Minkowski, Dr. Hermann**, o. Professor der Mathematik an der Universität Königsberg O./Pr., Geometrie der Zahlen. In zwei Lieferungen. Erste Lieferung. [240 S.] gr. 8. 1896. geh. n. *M* 8.—
- Netto, Dr. Eugen**, o. ö. Professor der Mathematik an der Universität zu Giessen, Vorlesungen über Algebra. In zwei Bänden. Erster Band. Mit eingedruckten Holzschnitten. [X u. 388 S.] gr. 8. 1896. geh. n. *M* 12.—
- Neumann, Dr. C.**, Professor der Mathematik an der Universität zu Leipzig, allgemeine Untersuchungen über das Newton'sche Princip der Fernwirkungen m. besonderer Rücksicht auf die elektrischen Wirkungen. [XXI u. 292 S.] gr. 8. 1896. geh. n. *M* 10.—
- Plücker's, Julius**, gesammelte wissenschaftliche Abhandlungen. Im Auftrag der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen herausgeg. von A. SCHOENFLIES u. FR. POCKELS. In 2 Bänden. gr. 8. geh. n. *M* 50.—
- Einzelne:
- I. Band: Mathematische Abhandlungen. Hrsg. von A. SCHOENFLIES. Mit einem Bildniss Plückers und 73 in den Text gedruckten Figuren. [XXXVI u. 620 S.] 1895. n. *M* 20.—
- II. Band: Physikalische Abhandlungen. Hrsg. von FR. POCKELS. Mit 78 Textfiguren und 9 Tafeln. [XVIII u. 834 S.] 1896. n. *M* 30.—
- Schlegel, Dr. V.**, Professor an der Gewerbeschule in Hagen, die Grassmann'sche Ausdehnungslehre. Ein Beitrag zur Geschichte der Mathematik in den letzten fünfzig Jahren. [44 S.] gr. 8. 1896. geh. n. *M* 2.—
- Schlesinger, Prof. Dr. Ludwig**, Privatdozent an der Universität Berlin, Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen. In 2 Bänden. II. Band. I. Theil. Mit Figuren im Text. [XVIII u. 532 S.] gr. 8. 1897. geh. n. *M* 18.—
- Schröder, Dr. Ernst**, o. Prof. der Mathematik an der technischen Hochschule zu Karlsruhe, Algebra und Logik der Relative, der Vorlesungen über die Algebra der Logik dritter Band. I. Abteilung. Mit vielen Textfiguren. [VIII u. 649 S.] gr. 8. 1895. geh. n. *M* 16.— [Band II, 2 erscheint im Januar 1897, III, 2 im Herbst 1897.]

- Stäckel, Dr. Paul**, Professor an der Universität Königsberg, und **Dr. Friedrich Engel**, Professor an der Universität Leipzig, die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gaußs, eine Urkundensammlung zur Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie. Mit 145 Figuren im Text und der Nachbildung eines Briefes von Gaußs. [X u. 325 S.] gr. 8. 1895. geh. n. *M.* 9.—
- Stahl, Dr. Hermann**, Professor der Mathematik in Tübingen, Theorie der Abel'schen Functionen. Mit Figuren im Text. [X u. 354 S.] gr. 8. 1896. geh. n. *M.* 12.—
- Staudé, Dr. Otto**, ordentlicher Professor der Mathematik an der Universität Rostock, die Focaleigenschaften der Flächen zweiter Ordnung. Ein neues Kapitel zu den Lehrbüchern der analytischen Geometrie des Raumes. Mit 49 Figuren im Text. [VIII u. 185 S.] gr. 8. 1896. geh. n. *M.* 7.—
- Stolz, Dr. Otto**, ord. Professor an der Universität zu Innsbruck, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung. In 2 Theilen. II. Theil: Complexe Veränderliche und Functionen. Mit 33 Figuren im Text. [IX u. 338 S.] gr. 8. 1896. geh. n. *M.* 8.—
- Sturm, Dr. Rudolf**, ord. Professor an der Königl. Universität zu Breslau, die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung. In 3 Theilen. III. (Schluss-)Theil. Die Strahlencomplexe zweiten Grades. [XXIV u. 518 S.] gr. 8. 1896. geh. n. *M.* 18.—
- Volkmann, P.**, ord. Professor an der Universität Königsberg i. Pr., Franz Neumann, * 11. September 1798, † 23. Mai 1895. Ein Beitrag zur Geschichte deutscher Wissenschaft. Dem Andenken an den Altmeister der mathematischen Physik gewidmete Blätter unter Benutzung einer Reihe von authentischen Quellen. Mit einem Bildniss Franz Neumann's. [VII u. 68 S.] gr. 8. 1896. geh. n. *M.* 2.40.
- erkenntnistheoretische Grundzüge der Naturwissenschaften und ihre Beziehungen zum Geistesleben der Gegenwart. Allgemein wissenschaftliche Vorträge. [XII u. 181 S.] gr. 8. 1896. geh. n. *M.* 6.—
- Weiler, Dr. A.**, in Zürich, neue Behandlung der Parallelprojektionen und der Axonometrie. Mit 109 Figuren im Text. 2., wohlfeile Ausgabe. [VII u. 210 S.] gr. 8. 1896. geh. n. *M.* 2.80.
- Wirtinger, Dr. Wilhelm**, a. o. Professor an der Universität in Innsbruck, Untersuchungen über Thetafunctionen. Von der philosophischen Fakultät der Universität Göttingen mit dem Beneke-Preise für 1895 gekrönt und mit Unterstützung der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften daselbst herausgegeben. [VIII u. 125 S.] gr. 4. 1895. geh. n. *M.* 9.—
- Wüllner, Adolph**, Lehrbuch der Experimentalphysik. 4 Bände. Erster Band. Allgemeine Physik und Akustik. Fünfte, vielfach umgearbeitete und verbesserte Auflage. Mit 321 in den Text gedruckten Abbildungen und Figuren. [X u. 1000 S.] gr. 8. 1895. geh. n. *M.* 12.—
- Zweiter Band. Die Lehre von der Wärme. Fünfte, vielfach umgearbeitete und verbesserte Auflage. Mit 131 in den Text gedruckten Abbildungen und Figuren. [XI u. 936 S.] gr. 8. 1896. geh. n. *M.* 12.—

[Band III, Magnetismus und Elektrizität, ist unter der Presse, Band IV, Lehre vom Licht, in Vorbereitung.]



Föppl, August,

Die Geometrie der Wirbelfelder in Anlehnung an das Buch des Verfassers über die Maxwell'sche Theorie der Elektrizität und zu dessen Ergänzung

Leipzig 1897

Phys.sp. 219 gs

urn:nbn:de:bvb:12-bsb11822251-4